中 国 科 学

1990 年 2 月　　A 辑　　第 2 期

不要求稳定和最小相位的线性系统的辨识

陈翰馥　　张纪锋

（中国科学院系统科学研究所，北京 100080）

摘　　要

本文给出了离散和连续时间线性系统的未知参数、阶及时滞的一致估计．所用方法的特点一是不要求稳定性、最小相位及系统的其他动态性能，二是设计的输入是逐渐趋于零的．当适应控制问题和辨识要同时解决时，上述第二个特性显得十分重要．

关键词：系统辨识，一致性，阶估计，时滞估计

一、引　　言

我们考虑线性离散时间系统

$$A(z)y_n = B(z)u_n,\ n \geqslant 0;\ y_n = 0,\ u_n = 0,\ n < 0 \tag{1}$$

和线性连续时间系统

$$A(s)y_t = B(s)u_t,\ t \geqslant 0;\ y_t = 0,\ u_t = 0,\ t < 0 \tag{2}$$

的未知矩阵系数、阶及时滞的辨识问题．这里 y_n 是系统的 m 维输出，u_n 是 l 维输入，z 和 s 分别表示后移算子（$zy_n = y_{n-1}$）和积分算子 $\left(sy_t = \int_0^t y_\lambda d\lambda\right)$，$A(z)$ 和 $B(z)$ 是系数阵、阶和时迟未矩的多项式阵

$$A(z) = I + A_1 z + \cdots + A_{p_0} z^{p_0},\ p_0 \geqslant 0, \tag{3}$$

$$B(z) = B_{d_0} z^{d_0} + \cdots + B_{q_0} z^{q_0},\ q_0 \geqslant d_0 \geqslant 1, \tag{4}$$

即时迟 d_0 和阶 (p_0, q_0) 及系数阵

$$\theta^\tau(p_0, d_0, q_0) = [-A_1 \cdots -A_{p_0} B_{d_0} \cdots B_{q_0}] \tag{5}$$

是有待估计的．

许多领域对此问题都有研究：在时间序列分析中，(1) 式便是 ARMA 模型，而 $\{u_n\}$，$n \in (-\infty, +\infty)$ 是一不能量测到的鞅差序列，为了估计未知参数和阶，通常假定[1-3]系统是稳定的或是最小相位的；在线性系统理论中，对系统进行辨识时，必须对系统的输入 $\{u_n\}$ 进行设计（即实验设计），系统的阶及时迟通常假定是已知的[4,5]，且假定系统要么稳定，要么最小相位，要么输入输出的增长受到约束[4,5] $\|y_n\| + \|u_n\| = O(n^\alpha)$，$\alpha > 0$；在适应控制理论中，输入的设计不仅要考虑到辨识系统而且还要考虑到控制系统，对系统所加的条件通常和上述线性理论中所要求的几乎相同[5-11]．

本文 1988 年 5 月 6 日收到，1989 年 7 月 19 日收到修改稿．

本文不假设诸如稳定性、最小相位或系统输入输出有界或增长速度受约束这些条件，对系统(1)和(2)分别设计了输入，利用最小二乘法得到了系统的参数、阶及时迟的强一致估计，并给出了参数收敛到真值的收敛速度．所设计的输入信号随时间的增加而逐渐消失，这对辨识的同时要解决适应控制问题是极为重要的．

二、离散时间系统的辨识

我们现在考虑(1),(3)和(4)式所描述的系统，其中时迟 d_0 及系统的阶 (p_0, q_0) 是未知的，但假定它们分别属于一有限集，准确地说，我们需要条件 H_1:

H_1，已知自然数 p^*, q^* 和 $d^* \in [1, q^*]$ 使

$$(p_0, q_0) \in M \triangleq \{(p, q): 0 \leqslant p \leqslant p^*,\ d^* \leqslant q \leqslant q^*\}, \tag{6}$$

$$d_0 \in \bar{M} \triangleq \{d: d^* \leqslant d \leqslant q^*\}. \tag{7}$$

这个条件的含义是阶 p_0, q_0 的上界和时迟 d_0 的下界是可以得到的．另外，我们还需如下的可辨识条件 H_2:

H_2，设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 无左公因子，且 A_{p_0} 和 B_{q_0} 行满秩．

设 $\{v_n, \mathscr{F}_n\}$ 是任一满足如下条件的 l 维鞅差序列

$$Ev_nv_n^\tau = \frac{1}{n^\varepsilon} I,\ \|v_n\|^2 \leqslant \frac{\sigma^2}{n^\varepsilon},\ n \geqslant 1,\ \varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2(t_0+1)}\right),$$

这里 $t_0 \triangleq (m+1)p^* + q^*$，$\sigma^2 > 0$ 为常数，且 $\mathscr{F}_n \triangleq \sigma\{v_i,\ i \leqslant n\}$．$\{v_n\}$ 是对系统的激励源，它使我们有可能辨识系统．

进一步，设 u_n^0 是根据控制目标设计的并且为对 $\sigma\{y_i, 0 \leqslant i \leqslant n\}$ 可测的 l 维输入．单为辨识，我们可设定 $u_n^0 \equiv 0$，而对适应控制的情形，我们允许 u_n^0 发散，但发散速度不快于

$$\sum_{i=0}^{n} \|u_i^0\|^2 = O(n^{1+\delta}),\quad \delta \in \left[0, \frac{1-2\varepsilon(t_0+1)}{2t_0+3}\right]. \tag{8}$$

最后，为辨识系统的参数、阶 (p_0, q_0) 及时迟 d_0，实际加到系统上的控制 u_n 为

$$u_n = u_n^0 + v_n. \tag{9}$$

现在我们给出系统参数、阶及时迟的估计方法．对 $\forall (p,q) \in M$ 及 $\forall d \in \bar{M}$，令

$$\theta^\tau(p, d, q) = [-A_1 \cdots -A_p B_d \cdots B_q], \tag{10}$$

$$\varphi_n^\tau(p,d,q) = [y_n^\tau \cdots y_{n-p+1}^\tau u_{n-d+1}^\tau \cdots u_{n-q+1}^\tau], \tag{11}$$

并约定：当 $i > p_0$ 时，$A_i = 0$；当 $j < d_0$ 或 $j > q_0$ 时，$B_j = 0$．

任给定初值 $\theta_0(p, d, q)$，$\theta(p, d, q)$ 的最小二乘估计 $\theta_n(p, d, q)$ 由下式给出：

$$\theta_n(p, d, q) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(p, d, q)\varphi_i^\tau(p, d, q) + I\right)^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(p, d, q) y_{i+1}^\tau, \tag{12}$$

或等价地由下列递推关系式给出：

$$\theta_{n+1}(p, d, q) = \theta_n(p, d, q) + b_n(p, d, q)P_n(p, d, q)\varphi_n(p, d, q)(y_{n+1}^\tau - \varphi_n^\tau(p, d, q)\theta_n(p, d, q)), \tag{13}$$

$$P_{n+1}(p, d, q) = P_n(p, d, q) - b_n(p, d, q)P_n(p, d, q)\varphi_n(p, d, q)\varphi_n^\tau(p, d, q)P_n(p, d, q), \tag{14}$$

$$P_0 = I,\ b_n(p, d, q) = (1 + \varphi_n^\tau(p, d, q)P_n(p, d, q)\varphi_n(p, d, q))^{-1}. \tag{15}$$

设 $\{a_n\}$ 是满足如下两式的任一正实数序列:

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \quad \frac{a_n}{n^{1-(t_0+1)(\varepsilon+\delta)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{16}$$

由于 $1-(t_0+1)(\varepsilon+\delta) \geqslant \frac{1-\varepsilon}{2} > 0$, 所以满足(16)式的 $\{a_n\}$ 是存在的.

对 $\forall (p, q) \in M$ 及 $\forall d \in \bar{M}$, 令

$$\sigma_n(p, d, q) = \sum_{i=0}^{n-1} \|y_{i+1} - \theta_n^{\tau}(p, d, q)\varphi_i(p, d, q)\|^2, \tag{17}$$

$$CIC_1(p, q)_n = \sigma_n(p, d^*, q) + (p+q) \cdot a_n. \tag{18}$$

(p_0, q_0) 的估计值 (p_n, q_n) 由极小化 $CIC(p, q)_n$ 给出,即

$$(p_n, q_n) = \underset{(p,q)\in M}{\operatorname{argmin}} CIC_1(p, q)_n, \quad n \geqslant 1. \tag{19}$$

对应于 (p_n, q_n), 对 $\forall d \in \bar{M}$, 令

$$CIC_2(d)_n = \sigma_n(p_n, d, q_n) - a_n \cdot d, \tag{20}$$

类似地时迟 d_0 的估计 d_n 由下式给出:

$$d_n = \underset{d\in\bar{M}}{\operatorname{argmin}} CIC_2(d)_n. \tag{21}$$

定理 1. 设条件 H_1 和 H_2 成立,控制 $\{u_n\}$ 由(8)和(9)式给出,则有

$$(p_n, d_n, q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (p_0, d_0, q_0), \text{ a.s.}, \tag{22}$$

$$\|\theta_n(p_n \vee p_0, d_n \wedge d_0, q_n \vee q_0) - \theta(p_n \vee p_0, d_n \wedge d_0, q_n \vee q_0)\| = O\left(\frac{1}{n^{1-(t_0+1)(\varepsilon+\delta)}}\right), \text{ a.s.}, \tag{23}$$

这里 $a \wedge b$ 和 $a \vee b$ 分别表示 $\min(a, b)$ 和 $\max(a, b)$.

该定理说明由(19)式和(21)式给出的 (p_n, q_n) 及 d_n 是系统的真阶 (p_0, q_0) 及真时迟 d_0 的一致估计,而(23)式指出了系统参数估计的收敛速度.

三、定理 1 的证明

对任 $(p, q) \in M$, 如果用 $\lambda_{\min}^{(p,q)}(n)$ 表示 $\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(p, d^*, q)\varphi_i^{\tau}(p, d^*, q)$ 的最小特征值, 则由文献[8]可得如下引理:

引理 1. 若(18)式中的正实数列 $\{a_n\}$ 及系统的输入 u_n 对 $(p, q) = (p_0, q^*)$ 和 $(p, q) = (p^*, q_0)$ 满足

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \text{ 和 } \frac{a_n}{\lambda_{\min}^{(p,q)}(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{24}$$

则由(19)式及(21)式给出的 (p_n, q_n) 及 d_n 是强一致的,即

$$(p_n, d_n, q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (p_0, d_0, q_0), \text{ a.s.}. \tag{25}$$

定理 1 的证明. 由引理 1 知, 为证(22)式, 只须证明满足(16)式的 $\{a_n\}$ 亦满足(24)式. 为此,又只须证明对 $(p, q) = (p_0, q^*)$ 及 $(p, q) = (p^*, q_0)$ 有

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-1+(t_0+1)(\varepsilon+\delta)} \lambda_{\min}^{(p,q)}(n) \neq 0, \text{ a.s.}. \tag{26}$$

若(26)不成立，则利用文献[7]中的类似方法可知存在 $pm+(q-d^*+1)l$ 维矢量

$$\eta=[\alpha^{(0)^T}\cdots\alpha^{(p-1)^T}\beta^{(d^*)^T}\cdots\beta^{(q-1)^T}]^T,\ \|\eta\|=1,$$

它满足

$$0=\sum_{i=0}^{p-1}\alpha^{(i)^T}z^i(Ad_jA(z))B(z)+\sum_{i=d^*}^{q-1}\beta^{(i)^T}z^i\det A(z)\cdot I. \tag{27}$$

若 $(p,q)=(p_0,q^*)$，则显然有

$$\deg\left(\sum_{i=0}^{p-1}\alpha^{(i)^T}z^i\right)\leqslant p_0-1. \tag{28}$$

若 $(p,q)=(p^*,q_0)$，则由(27)式知

$$\deg\left(\sum_{i=0}^{p-1}\alpha^{(i)^T}z^i\right)+(m-1)p_0+q_0=\deg\left(\sum_{i=d^*}^{q_0-1}\beta^{(i)^T}z^i(\det A(z)\right)\leqslant p_0-1+mp_0,$$

从而有

$$\deg\left(\sum_{i=0}^{p-1}\alpha^{(i)^T}z^i\right)\leqslant p_0-1,$$

因此，(28)式对 $(p,q)=(p_0,q^*)$ 及 $(p,q)=(p^*,q_0)$ 均成立.

由条件 H_2 知存在多项式阵 $M(z)$ 和 $N(z)$ 使

$$A(z)M(z)+B(z)N(z)=I,$$

从而由(27)式得

$$\sum_{i=0}^{p-1}\alpha^{(i)^T}z^iAd_jA(z)=\sum_{i=0}^{p-1}\alpha^{(i)^T}z^iAd_jA(z)(A(z)M(z)+B(z)N(z))$$

$$=(\det A(z))\left(\sum_{i=0}^{p-1}\alpha^{(i)^T}z^iM(z)-\sum_{i=d^*}^{q-1}\beta^{(i)^T}z^iN(z)\right). \tag{29}$$

由此及(28)式得

$$\deg\left(\sum_{i=0}^{p-1}\alpha^{(i)^T}z^iAd_jA(z)\right)\leqslant p_0-1+(m-1)p_0=mp_0-1<mp_0$$

$$=\deg(\det A(z)).$$

由此，从(29)式知 $\alpha^{(i)}=0$，$0\leqslant i\leqslant p-1$；进而由(27)式知 $\beta^{(j)}=0$，$d^*\leqslant j\leqslant q-1$，这与 $\|\eta\|=1$ 矛盾，所以(26)式成立.

由于 M 和 $\bar{M}$ 均为有限集，所以由(22)式可知对一切充分大的 n，有 $(p_n,d_n,q_n)\equiv(p_0,d_0,q_0)$.

由(12)式易见

$$\|\theta(p,d^*,q)-\theta_n(p,d^*,q)\|=O\left(\frac{1}{\lambda_{\min}^{(p_0,q_0)}(n)}\right),$$

由此及(26)式知(23)式成立.

四、连续时间系统的辨识

本节考虑由(2)—(4)式描述的系统，并仍假定条件 H_1 和 H_2 成立.

对由(10)式定义的 $\theta(p,d,q)$ 的最小二乘估计

$$\theta_t^{\tau}(p, d, q) = [-A_{1t} \cdots -A_{pt} B_{dt} \cdots B_{qt}], \tag{30}$$

由

$$\theta_t(p, d, q) = \left(\int_0^t \varphi_s(p, d, q)\varphi_s^{\tau}(p, d, q)ds + I\right)^{-1} \int_0^t \varphi_s(p, d, q) y_s^{\tau} ds \tag{31}$$

给出,其中

$$\varphi_t(p, d, q) = [sy_t^{\tau} \cdots s^p y_t^{\tau} s^d u_t^{\tau} \cdots s^q u_t^{\tau}]^{\tau}. \tag{32}$$

类似于离散时间的情形,(p_0, d_0) 的估计值 (p_t, q_t) 和 d_0 的估计值 d_t 分别由下式给出:

$$(p_t, q_t) = \underset{(p,q)\in M}{\operatorname{argmin}} CIC_1(p, q)_t, \tag{33}$$

$$d_t = \underset{d\in \bar{M}}{\operatorname{argmin}} CIC_2(d)_t, \tag{34}$$

其中

$$CIC_1(p, q)_t = \sigma_t(p, d^*, q) + (p + q)a_t, \tag{35}$$

$$CIC_2(d)_t = \sigma_t(p_t, d, q_t) - d \cdot a_t, \tag{36}$$

$$\sigma_t(p, d, q) = \int_0^t (y_s - \theta_t^{\tau}(p, d, q)\varphi_s(p, d, q))^2 ds. \tag{37}$$

而 a_t 是任一对任意的 $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 满足如下两式的正的实函数:

$$a_t \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty, \qquad \frac{a_t}{(t+1)^{1-2\varepsilon}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0. \tag{38}$$

设 $\{w_t, \mathscr{F}_t\}$ 是一 l 维维纳过程, $G(s) = 1 + g_1 s + \cdots + g_\mu s^\mu$ 为任一具有负实根的 $\mu(>q^*)$ 阶多项式. 系统(2)—(4)式的激励输入 u_t 定义为下列方程的解:

$$G(s)u_t = (1 + t)^{-\varepsilon} w_t. \tag{39}$$

这里 u_t 对应于离散时间情形(9)式中的 v_n, 它纯是用来辨识未知参数的. 为了在参数辨识的同时对系统进行控制,自然要求叠加在所希望的控制上的激励源随时间的增加而趋于零. 下面我们就来证明 $u_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$. 事实上,可以证明:

引理 2. 设 u_t 由(39)式给出,则

$$U_t = [u_t^{\tau}\ su_t^{\tau} \cdots s^{\mu-1} u_t^{\tau}]^{\tau} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0, \text{ a.s.}, \quad B(s)u_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

证. 令

$$F_g = \begin{bmatrix} -g_1 I & \cdots & -g_\mu I \\ I & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & I\ \ 0 \end{bmatrix}, \quad I = I_{l\times l},$$

P 为使 $PF_gP^{-1} \triangleq J_g$ 为下三角形若当形的非奇异阵,由于 $G(s)$ 的根是负实数, F_g 的特征根为 $G(s)$ 根的倒数,所以若令 $-\lambda_i (i = 1, \cdots, \mu l)$ 为 J_g 的对角线上的元素,则必有 $\lambda_i > 0$. 易见

$$dPU_t = J_g PU_t dt + Pd[(1 + t)^{-\varepsilon} w_t^{\tau} 0 \cdots 0]^{\tau}. \tag{40}$$

且为证明 $U_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, a.s., 只须证明 $PU_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

考虑 PU_t 每个分量所满足的方程，从(40)式知为证 $PU_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, a. s., 只须证明满足下面方程的解 $x_t \to 0 (t \to \infty)$:

$$dx_t = f_t d_t - \lambda_i x_t d_t + c^\tau d((t+1)^{-\varepsilon} w_t), \quad x_0 = 0, \tag{41}$$

这里 f_t 或者恒为零或者为一趋于零并和 $\mathcal{F}_t$ 适应的连续过程，c 为 l 维常矢量，它实际上是 P 的某行的前 l 个元素.

我们有

$$x_t = \int_0^t e^{-\lambda_i(t-\lambda)} f_\lambda d\lambda - \varepsilon c^\tau \int_0^t e^{-\lambda_i(t-\lambda)}(t+1)^{-1-\varepsilon} w_\lambda d\lambda + c^\tau \int_0^t e^{-\lambda_i(t-\lambda)}(1+\lambda)^{-\varepsilon} dw_\lambda$$
$$\triangleq I_1(t) + I_2(t) + I_3(t).$$

由于 $f_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$，并由重对数律[11]

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2lt \log\log t}} \|w_t\| = 1, \tag{42}$$

可知 $(1+t)^{-1-\varepsilon} w_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$，所以 $I_1(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ 和 $I_2(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

令 $\tau(t) = \inf\left\{\tau: \int_0^\tau e^{2\lambda_i\lambda}(1+\lambda)^{-2\varepsilon} d\lambda = t\right\}$，则由文献[11]的定理 4.7.4 知 $\int_0^{\tau(t)} e^{\lambda_i\lambda} \times \cdot(1+\lambda)^{-\varepsilon} dw_\lambda$ 是 l 维维纳过程. 令

$$a(t) = \int_0^t e^{2\lambda_i\lambda}(1+\lambda)^{-2\varepsilon} d\lambda,$$

则由重对数律(42)式知

$$\frac{1}{\sqrt{2la(T)\log\log a(T)}} \left| \int_0^T e^{\lambda_i\lambda}(1+\lambda)^{-\varepsilon} dw_\lambda \right| = O(1),$$

由此可知

$$\|I_3(t)\| = O(e^{-\lambda_i t}(2la(t)\log\log a(t))^{\frac{1}{2}}) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

定理 2. 设条件 H_1 和 H_2 成立，u_t 由(39)式给出，则有

$$(p_t, d_t, q_t) \xrightarrow[t\to\infty]{} (p_0, d_0, q_0), \text{ a. s.}, \tag{43}$$

$$\|\theta_t(P_t \vee p_0, d_t \wedge d_0, q_t \vee q_0) - \theta(p_t \vee p_0, d_t \wedge d_0, q_t \vee q_0)\|$$
$$= O((1+t)^{-(1-2\varepsilon)}), \text{ a.s.}. \tag{44}$$

为证该定理，我们先证明两个引理.

引理 3. 若(35)和(36)式中的正实函数 a_t 和系统的输入 u_t 满足下列条件：当 $(p, q) = (p_0, q^*)$ 或 $(p, q) = (p^*, q_0)$ 时，有

$$a_t \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty \quad 和 \quad \frac{a_t}{\lambda_{\min}^{(p,q)}(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0, \text{ a. s.}, \tag{45}$$

则(33)和(34)式给出的 (p_t, d_t, q_t) 是强一致的，且

$$\|\theta_t(p_t \vee p_0, d_t \wedge d_0, q_t \vee q_0) - \theta(p_t \vee p_0, d_t \wedge d_0, q_t \vee q_0)\| = O\left(\frac{1}{\lambda_{\min}^{(p,q)}(t)}\right), \tag{46}$$

这里 $\lambda_{\min}^{(p,q)}(t)$ 表示 $\int_0^t \varphi_s(p, d^*, q)\varphi_s^\tau(p, d^*, q) ds$ 的最小特征值.

证. 在引理 1 中,若用 t 和 $\int_0^t$ 分别代替 n 和 $\sum_{i=0}^{n-1}$, 则类似于引理 1 可知 (p_t, d_t, q_t) 是强一致的. 而收敛速度(46)式则是

$$\theta(p, d^*, q) - \theta_t(p, d^*, q) = \left(\int_0^t \varphi_s(p, d^*, q)\varphi_s^\tau(p, d^*, q)ds + I\right)^{-1}\theta(p, d^*, q),$$

$$p \geqslant p_0,\ q \geqslant q_0$$

的直接推论.

设 $H(s) = 1 + h_1 s + \cdots + h_\nu s^\nu$ 为任一具有负实根的 $\nu \triangleq mp^* + q^* + 1$ 阶多项式; $E(s) \triangleq G(s)H(s) \triangleq 1 + e_1 s + \cdots + e_{\mu+\nu}s^\nu$, 并令 l 维的 v_t 是方程

$$H(s)v_t = u_t \text{ 或 } E(s)v_t = (1+t)^{-\varepsilon}w_t \tag{47}$$

的解,这里 u_t 由(39)式给出. 记

$$F_e = \begin{bmatrix} -e_1 I & \cdots & -e_{\mu+\nu}I \\ I & 0 \cdots & 0 \\ 0 & I & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 \cdots & 0 & I \quad 0 \end{bmatrix}, \quad I = I_{l\times l}. \tag{48}$$

令 $V_t = [v_t^\tau s v_t^\tau \cdots s^{\mu+\nu-1}v_t^\tau]^\tau$, 则类似于(40)式得

$$V_t = F_e\int_0^t e^{F_e(t-\lambda)}[(1+\lambda)^{-\varepsilon}w_\lambda^\tau 0\cdots 0]^\tau d\lambda + [(1+t)^{-\varepsilon}w_t^\tau 0\cdots 0]^\tau \tag{49}$$

或等价地写为

$$dV_t = F_e V_t dt + [d((1+t)^{-\varepsilon}w_t^\tau)0\cdots 0]^\tau. \tag{50}$$

引理 4. 若 V_t 由(49)式给出,则

$$\frac{1}{T^{1-2\varepsilon}}\int_0^T V_t V_t^\tau dt \xrightarrow[T\to\infty]{} \frac{1}{1-2\varepsilon}R, \text{ a.s.}, \tag{51}$$

这里 $R = \int_0^\infty e^{F_e\lambda}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}e^{F_e^\tau\lambda}d\lambda$ 是正定阵.

证. 由于 $E(s)$ 的根为负实数,所以 F_e 是一稳定阵,从而存在正定阵 $\bar{P}$ (实际上, $\bar{P} = \int_0^\infty e^{F_e^\tau\lambda}e^{F_e\lambda}d\lambda$) 满足 $\bar{P}$

$$\bar{P}F_e + F_e^\tau\bar{P} = -I. \tag{52}$$

由(52)式及伊藤公式得

$$dV_t^\tau\bar{P}V_t = -\|V_t\|^2dt + (1+t)^{-2\varepsilon}tr\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\bar{P}dt + 2(1+t)^{-\varepsilon}V_t^\tau\bar{P}[I\ 0\cdots 0]^\tau dw_t$$

$$-2\varepsilon(1+t)^{-1-\varepsilon}V_t^\tau\bar{P}[I\ 0\cdots 0]^\tau w_t dt. \tag{53}$$

由于[9-11]

$$\int_0^t(1+\lambda)^{-\varepsilon}V_\lambda^\tau\bar{P}[I\ 0\cdots 0]^\tau dw_\lambda = O(1) + o\left(\left\{\int_0^t\|V_\lambda\|^2d\lambda\right\}^{\frac{1}{2}+\eta}\right),\ \forall\eta > 0 \tag{54}$$

且由重对数律(42)式知

$$\int_0^t(1+t)^{-1-\varepsilon}V_\lambda^\tau\bar{P}[I\ 0\cdots 0]^\tau w_\lambda d\lambda = o\left(\int_0^t(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\|V_\lambda\|d\lambda\right)$$

$$= o\left(\left(\int_0^t \|V_\lambda\|^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

所以从(53)式得

$$\int_0^t \|V_\lambda\|^2 d\lambda = O((1+t)^{1-2\varepsilon}). \tag{55}$$

由 F_c 的稳定性可知，存在某常数 $\rho > 0$，使

$$e^{F_c t} = O(e^{-\rho t}). \tag{56}$$

由(55)和(56)式得

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{F_c(t-\lambda)} \int_0^\lambda (1+s)^{-1-\varepsilon} V_s w_s^\tau ds e^{F_c^\tau(t-\lambda)} d\lambda \\
&= O\left(\int_0^t e^{-2\rho(t-\lambda)} \int_0^\lambda (1+s)^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \|V_s\| ds d\lambda\right) \\
&= O\left(\int_0^t e^{-2\rho(t-\lambda)} \left(\int_0^\lambda \|V_s\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} d\lambda\right) = O((1+t)^{\frac{1}{2}-\varepsilon})
\end{aligned} \tag{57}$$

和

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{F_c(t-\lambda)} \int_0^\lambda (1+s)^{-\varepsilon} V_s dw_s^\tau e^{F_c^\tau(t-\lambda)} d\lambda\Big) \\
&= O\left(\int_0^t e^{-2\rho(t-\lambda)} \left(\int_0^\lambda (1+s)^{-2\varepsilon} d \int_0^s \|V_\mu\|^2 d\mu ds\right)^{\frac{1}{2}+\eta} d\lambda\right) \\
&= O\left(\int_0^t e^{-2\rho(t-\lambda)} (1+\lambda)^{(1-4\varepsilon)(\frac{1}{2}+\eta)} d\lambda\right) = O((1+t)^{(1-4\varepsilon)(\frac{1}{2}+\eta)}).
\end{aligned} \tag{58}$$

对 $dV_t V_t^\tau$ 用伊藤公式，并注意到(57)和(58)式可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \frac{1}{(1+t)^{1-2\varepsilon}} \int_0^t V_s V_s^\tau ds \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{(1+t)^{1-2\varepsilon}} \left\{-\varepsilon \int_0^t e^{F_c(t-\lambda)} \int_0^\lambda (1+s)^{-1-\varepsilon} (V_s w_s^\tau [I\ 0\cdots 0]\right. \\
&\quad + [I\ 0\cdots 0]^\tau w_s V_s^\tau) ds \cdot e^{F_c^\tau(t-\lambda)} d\lambda + \int_0^t e^{F_c(t-\lambda)} \int_0^\lambda (1+s)^{-\varepsilon} ([I\ 0\cdots \\
&\quad 0]^\tau (dw_\lambda) V_s^\tau + V_s dw_s^\tau [I\ 0\cdots 0]) e^{F_c^\tau(t-\lambda)} d\lambda \\
&\quad \left. + \frac{1}{1-2\varepsilon} \int_0^t e^{F_c(t-\lambda)} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ((1+\lambda)^{1-2\varepsilon} - 1) e^{F_c^\tau(t-\lambda)} d\lambda \right\} \\
&= \frac{1}{1-2\varepsilon} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{(1+t)^{1-2\varepsilon}} \int_0^t e^{F_c(t-\lambda)} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (1+\lambda)^{1-2\varepsilon} e^{F_c^\tau(t-\lambda)} d\lambda = \frac{1}{1-2\varepsilon} R.
\end{aligned}$$

由于 $(F_c, [I_l 0\cdots 0]^\tau)$ 是能控的，所以 R 正定.

定理 2 的证明. 由引理 2 知只须证明当 $(p, q) = (p_0, q^*)$ 或 $(p, q) = (p^*, q_0)$ 时，有

$$\liminf_{t\to\infty} (1+t)^{-1+2\varepsilon} \lambda_{\min}^{(p,q)}(t) \neq 0, \text{a.s.}. \tag{59}$$

令

$$\begin{aligned}
\phi_t(p, q) = [&s(Ad_j A(s)) B(s) v_t^\tau \cdots s^p (Ad_j A(s) B(s) v_t^\tau \\
&s^{d^*} \det A(s) v_t^\tau \cdots s^q \det A(s) v_t^\tau]^\tau,
\end{aligned} \tag{60}$$

显然 $\phi_t(p, q)$ 满足下列方程:

$$H(s)\phi_t(p, q) = (\det A(s))\phi_t(p, d^*, q).$$

由于 $H(s)$ 的根是负实数,且 $(\det A(s))/H(s)$ 为 s 的真有理分式,所以我们有[9]

$$\lambda_{\min}\left(\int_0^t \phi_s(p, q)\phi_s^\tau(p, q)ds\right) = \inf_{\|x\|=1}\left(\int_0^t\left(\frac{\det A(s)}{H(s)}x^\tau\varphi_s(p, d^*, q)\right)^2 ds\right)$$

$$\leqslant c\cdot\inf_{x\times n=1}\left(\int_0^t(x^2\varphi_s(p, d^*, q))^2 ds\right) = c\cdot\lambda_{\min}^{(p,q)}(t), \tag{61}$$

这里 $c>0$ 为某常数, $\lambda_{\min}(X)$ 表示矩阵 X 的最小特征值. 因此,为证(59)式,只须证

$$\liminf_{t\to\infty}(1+t)^{-1+2\varepsilon}\lambda_{\min}\left(\int_0^t \phi_s(p, q)\phi_s^\tau(p, q)ds\right)\neq 0,\ \text{a.s.}. \tag{62}$$

事实上,若(62)式不成立,则必存在单位矢量

$$\eta_{t_k} = [\alpha_{t_k}^{(0)\tau}\cdots\alpha_{t_k}^{(p-1)\tau}\beta_{t_k}^{(d^*)\tau}\cdots\beta_{t_k}^{(q-1)\tau}]^\tau \tag{63}$$

满足

$$\lim_{k\to\infty}(1+t_k)^{-1+2\varepsilon}\left(\int_0^t(\eta_{t_k}^\tau\phi_s(p,q)^2 ds\right) = 0, \tag{64}$$

这里 $\alpha_{t_k}^{(i)}(0\leqslant i\leqslant p-1)$ 和 $\beta_{t_k}^{(j)}(d^*\leqslant j\leqslant q-1)$ 分别为 m 和 l 维矢量.

由(60)式易见

$$\eta_{t_k}^\tau\phi_t(p, q) = s\sum_{i=0}^{p-1}\alpha_{t_k}^{(i)\tau}s^i(Ad_jA(s))B(s)v_t + s\sum_{i=d^*}^{q-1}\beta_{t_k}^{(i)\tau}s^i\det A(s)v_t$$
$$\triangleq[h_{t_k}^{(0)\tau}\cdots h_{t_k}^{(\mu+\nu-1)\tau}]^\tau V_t, \tag{65}$$

这里 $h_{t_k}^{(i)}(0\leqslant i\leqslant\mu+\nu-1)$ 是有界的 l 维矢量,从而由(64)式及引理 3 得

$$0 = \lim_{k\to\infty}(1+t_k)^{-1+2\varepsilon}[h_{t_k}^{(0)\tau}\cdots h_{t_k}^{(\mu+\nu-1)\tau}]\int_0^{t_k} V_sV_s^\tau ds\cdot[h_{t_k}^{(0)\tau}\cdots h_{t_k}^{(\mu+\nu-1)\tau}]^\tau$$
$$\geqslant\limsup_{k\to\infty}[h_{t_k}^{(0)\tau}\cdots h_{t_k}^{(\mu+\nu-1)\tau}]\frac{R}{2(1-2\varepsilon)}[h_{t_k}^{(0)\tau}\cdots h_{t_k}^{(\mu+\nu-1)\tau}]^\tau,$$

所以 $\lim_{k\to\infty}h_{t_k}^{(i)} = 0$ $(0\leqslant i\leqslant\mu+\nu-1)$, 从而对任复数 s 有

$$\lim_{k\to\infty}H_{t_k}(s)\triangleq\lim_{k\to\infty}\left\{s\sum_{i=0}^{p-1}\alpha_{t_k}^{(i)\tau}s^i(Ad_jA(s))B(s) + s\sum_{i=d^*}^{q-1}\beta_{t_k}^{(i)\tau}s^i(\det A(s))\cdot I\right\} = 0. \tag{66}$$

设 $\eta = [\alpha^{(0)\tau}\cdots\alpha^{(p-1)\tau}\beta^{(d^*)\tau}\cdots\beta^{(q-1)\tau}]^\tau$, $\|\eta\| = 1$ 是 $\{\eta_{t_k}\}$ 的一极限点,则由(66)式知

$$\sum_{i=0}^{p-1}\alpha^{(i)\tau}s^i(Ad_jA(s))B(s) + \sum_{i=d^*}^{q-1}\beta^{(i)\tau}s^i(\det A(s))\cdot I = 0,$$

这和(27)式完全相同,所以类似于定理 1 可知此式不可能成立. 这个矛盾说明(62)式,从而定理正确.

五、结 束 语

本文考虑了线性输入-输出系统辨识的实验设计问题. 所用方法的特点是: (1) 未知参数阵、系统阶数及时迟都得到了强一致估计; (2) 对系统既不假设稳定性也不假设最小相位性; (3) 离散时间系统和连续时间系统进行了类似的分析. 就作者所知,在系统辨识中,对系统的行为特性不作任何要求的工作,本文尚属首次.

最后，有待我们进一步解决的问题是：如何去掉要求价的上界及时迟的下界已知这一限制；如何解决对系统不加稳定及最小相位条件的适应控制问题。

参　考　文　献

[1] Hannan, E. J. & Rissanen, J., *Biometrika*, 69(1982), 81—94.

[2] Hannan, E. J. & Kavalieris, L., *Adv. Appl. Prob.*, 16(1984), 492—561.

[3] Hannan, E. J., Kavalieris, L. & Mackisack, M., *Biometrika*, 73(1986), 119—133.

[4] Tugait, J. K., *Automatica*, 22(1986), 457—464.

[5] Chen, H. F. & Guo, L., *Int. J. Contr.*, 45(1987), 2183—2202.

[6] Chen, H. F. & Guo, L., *SIAM J. Contr. & Optim.*, 25(1987), 558—575.

[7] Chen, H. F. & Guo, L., *Int. J. Control*, 44(1986), 1459—1476.

[8] Chen, H. F. & Zhang, J. F., Delay and coefficients, to appear in *IEEE Autm. Contr.*, 1989.

[9] Chen, H. F. & Guo, L., Continuous-time stochastic adaptive trackign: robustness and asymptotic properties. *SIAM* (to appear).

[10] Chen, H. F. & Moore, J. B., *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-32(1987), 267—269.

[11] Friedman, A., *Stochastic Differential Equations and Applications*, Vol. 1, Academic Press, 1975.