

# 基于马尔科夫拓扑切换和随机通信干扰的 连续时间多自主体系统的趋同控制<sup>\*</sup>

张 强 张 纪 峰

(中国科学院数学与系统科学研究院系统科学所系统控制重点实验室, 北京 100190)

**摘要** 研究了基于不可靠通信网络的连续时间多自主体系统的趋同控制. 自主体间的通信信道受高斯噪声干扰; 不可靠通信因素导致的网络拓扑随机切换由马氏链刻画. 为克服随机噪声和马尔科夫拓扑切换的影响, 设计了随机逼近型趋同协议; 基于马氏跳参数随机微分方程稳定性理论、代数图理论、连续鞅和马氏链理论, 证明了多自主体系统实现渐近无偏均方平均趋同和以概率 1 平均趋同, 分析了各个体所用增益函数的不同对趋同性的影响.

**关键词** 多自主体系统, 趋同控制, 随机通信噪声, 马氏链.

MR(2000) 主题分类号 90B15, 68M14

## 1 引言

近年来多自主体系统的分布式协调控制与分布式估计受到人们的广泛关注, 成为研究的热点问题<sup>[1-2]</sup>. 趋同问题作为这一领域的基本问题更是得到众多的理论研究<sup>[3-5]</sup>. 这类问题主要研究如何通过各自主体间的局部通信协作实现多自主体系统的整体行为. 现实中, 自主体间的通信受到各种不确定性因素的影响, 包括噪声、量化及时延等对通信信号真实度和实时性的影响<sup>[5-7]</sup>; 丢包、节点的失效或重建等导致的网络拓扑时变<sup>[8-10]</sup>等. 这些不确定性因素大大降低了自主体间通信信息流的传输质量和准确度, 进而对自主体系统的整体行为产生重要影响. 因此, 基于不可靠通信网络的多自主体系统趋同性控制是极具实际应用价值和理论研究意义的问题, 引起了人们的重视<sup>[6-13]</sup>. 文[6,10-12]研究了随机通信噪声下多自主体系统的趋同问题, 基于随机逼近型趋同协议, 得到了均方趋同及以概率 1 趋同的充要条件. 当通信拓扑图时变时, 文[10]证明了随机逼近型趋同算法在通信拓扑联合连通条件下可实现均方趋同及以概率 1 趋同; 当通信拓扑图随机时变时, 文[12]用马氏链刻画拓扑切换在时间域上的相关性, 在随机噪声干扰下, 证明了拓扑的联合连通性(马氏链状态集对应的所有拓扑图的并图连通)是保证系统实现均方趋同及以概率 1 趋同的充分条件. 以上工作均

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金项目(60934006, 60821091).

收稿日期: 2011-05-31.

是针对离散时间自主体系统进行的研究, 对于连续时间多自主体系统在不可靠通信网络下的趋同性控制, 目前尚未得到很好研究. 文 [13] 针对固定拓扑下受随机通信噪声干扰的连续时间多自主体系统, 给出了实现渐近无偏均方平均趋同的充要条件. 当通信拓扑随机切换且受随机通信噪声干扰时, 对连续时间多自主体系统的均方收敛性及以概率 1 趋同性的理论分析将更加困难.

针对此问题, 本文设计了随机逼近型趋同协议, 借助连续时间马氏跳变系统的稳定性理论, 应用代数图、连续鞅论及马氏链理论, 证明了通信拓扑的联合连通性以及趋同增益的收敛性和鲁棒性条件, 可保证多自主体系统实现渐近无偏均方平均趋同和渐近无偏以概率 1 平均趋同. 进一步, 考虑了不同增益函数对各自主体趋同性的影响, 得出增益函数的差异可使自主体实现趋同时的无偏性受到影响.

本文其余部分的组织如下. 第 2 节, 引入图论的基本概念, 描述了本文要研究的问题. 第 3 节, 设计了分布式趋同协议, 给出了自主体系统实现渐近无偏均方平均趋同和以概率 1 趋同的充分条件, 考察了不同趋同增益函数对自主体系统趋同性的影响. 第 4 节是仿真模拟, 验证了本文结果的正确性. 第 5 节对本文进行了总结.

以下是全文通用的符号.  $\mathbb{R}^m$  表示  $m$  维实向量空间,  $\mathbb{R}^+$  表示正实数集合;  $\mathbf{1}_N \in \mathbb{R}^N$  表示各元素均为 1 的  $N$  维列向量; 对集合  $S$ ,  $|S|$  表示  $S$  中元素的个数; 对给定的向量或矩阵  $X$ ,  $X^T$  表示  $X$  的转置,  $\|X\|$  表示  $X$  的 Euclid 范数,  $\|X\|_F$  表示  $X$  的 Frobenius 范数; 方阵  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  和  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  的 Kronecker 和定义为  $A \oplus B = (I_n \otimes A) + (B \otimes I_m) \in \mathbb{R}^{mn \times mn}$ , 其中  $\otimes$  表示 Kronecker 积. 本文用到 Kronecker 积的如下性质:  $(L \otimes K)^T = L^T \otimes K^T$ ,  $(L_1 \otimes K_1)(L_2 \otimes K_2) = (L_1 L_2) \otimes (K_1 K_2)$ .

## 2 问题描述

### 2.1 图论基本概念

考虑由  $N$  个自主体组成的多自主体网络. 我们用加权有向图  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}_{\mathcal{G}}, \mathcal{A}_{\mathcal{G}}\}$  表示各自主体间的通信关系, 其中  $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$  为有向图  $\mathcal{G}$  的节点集, 节点  $i \in \mathcal{V}$  代表自主体  $i$ ;  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  为  $\mathcal{G}$  的边集, 有向边  $(i, j) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  当且仅当存在由  $i$  到  $j$  的通信信道, 此时  $i$  称为父节点,  $j$  称为子节点.  $\mathcal{A}_{\mathcal{G}} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$  称为有向图  $\mathcal{G}$  的加权邻接矩阵, 矩阵元素  $a_{ij} \geq 0$ , 并且  $a_{ij} > 0$  当且仅当  $(j, i) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ .  $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} : (j, i) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}}\}$  表示节点  $i$  的邻居节点集合. 边  $(i, i)$  称为环. 本文假设边集  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  中不含有环.

对任给的节点  $i \in \mathcal{V}$ , 若满足  $\sum_{j=1}^N a_{ij} = \sum_{j=1}^N a_{ji}$ , 则称  $\mathcal{G}$  为平衡图. 如果  $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$  是对称矩阵, 则称  $\mathcal{G}$  为无向图.  $\mathcal{L}_{\mathcal{G}} = \mathcal{D}_{\mathcal{G}} - \mathcal{A}_{\mathcal{G}}$  表示有向图  $\mathcal{G}$  的 Laplacian 矩阵, 其中  $\mathcal{D}_{\mathcal{G}} = \text{diag}\left\{\sum_{j=1}^N a_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^N a_{Nj}\right\}$ . 给定矩阵  $\Lambda = [\lambda_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , 称  $\mathcal{G}_{\Lambda} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}_{\mathcal{G}_{\Lambda}}, \mathcal{A}_{\mathcal{G}_{\Lambda}}\}$  为由  $\Lambda$  生成的有向图, 其中  $\mathcal{A}_{\mathcal{G}_{\Lambda}} = [\lambda'_{ij}]$ ,  $\lambda'_{ii} = 0$ ,  $\lambda'_{ij} = \lambda_{ij}$ ,  $i \neq j$ . 无向图  $\hat{\mathcal{G}} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}_{\hat{\mathcal{G}}}, \mathcal{A}_{\hat{\mathcal{G}}}\}$  称为有向图  $\mathcal{G}$  的对称化图, 其中邻接矩阵  $\mathcal{A}_{\hat{\mathcal{G}}} = [\hat{a}_{ij}]$ ,  $\hat{a}_{ij} = \hat{a}_{ji} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$  [5]. 对任给的正整数  $k$ ,  $\sum_{i=1}^k \mathcal{G}(i) = \left\{\mathcal{V}, \bigcup_{i=1}^k \mathcal{E}_{\mathcal{G}(i)}, \sum_{i=1}^k \mathcal{A}_{\mathcal{G}(i)}\right\}$  表示  $k$  个有向图  $\{\mathcal{G}(i), i = 1, 2, \dots, k\}$  的并图. 一列边

$(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k)$  称为从节点  $i_1$  到节点  $i_k$  的有向路径. 如果对任意的  $i, j \in \mathcal{V}$ , 存在一条从  $i$  到  $j$  的有向路径, 则称  $\mathcal{G}$  是强连通的. 有向树是特殊的有向图, 它有且仅有一个根节点, 并且其余所有节点有且仅有一个父节点. 有向图  $\mathcal{G}$  的生成树是由  $\mathcal{G}$  的部分边连接所有节点的有向树.

## 2.2 分布式趋同

考虑由  $N$  个自主体组成的多自主体网络. 自主体  $i$  ( $i \in \mathcal{V}$ ) 由如下的连续时间一阶动态系统描述:

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), \quad (1)$$

其中  $x_i(t) \in \mathbb{R}$ ,  $u_i(t) \in \mathbb{R}$  分别为自主体  $i$  在  $t$  时刻的状态和控制.

各自主体通过如下的不可靠通信网络进行通信. 记不存在信道丢失时的理想通信网络为  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}_{\mathcal{G}}, \mathcal{A}_{\mathcal{G}}\}$ .  $\mathcal{E}_f \subset \mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  为可能发生信号丢失的通信信道集合. 若自主体  $j$  到自主体  $i$  的通信信道  $(j, i) \in \mathcal{E}_f$ , 则信道的丢失、重建随时间的演化用状态空间取  $\{0, 1\}$  的马氏链  $m_t^{ji}$  描述, 其中状态“1”表示信道正常, 状态“0”表示信道丢失. 按一定的次序对  $\mathcal{E}_f$  中的边进行标号, 并依此顺序将描述每条通信信道状态的马氏链列为一向量, 记作  $m_t$ . 显然, 由于节点数及  $m_t^{ji}$  的状态空间有限,  $m_t$  的状态空间  $\mathcal{S}$  是有限维的, 其元素为  $|\mathcal{E}_f|$  维向量, 每个向量的元素取 0 或 1. 不妨将状态空间的元素依次标号为  $I = \{1, 2, \dots, s\}$ ,  $s = 2^{|\mathcal{E}_f|}$ , 对应的有向通信拓扑图分别记为  $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(2)}, \dots, \mathcal{G}^{(s)}\}$ , 其中  $\mathcal{G}^{(k)} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}_{\mathcal{G}^{(k)}}, \mathcal{A}_{\mathcal{G}^{(k)}}\}$  为加权有向图, 其加权邻接矩阵  $\mathcal{A}_{\mathcal{G}^{(k)}} = [a_{ij}^{(k)}]$ . 记  $t$  时刻的通信拓扑图为  $\mathcal{G}_t$ , 则  $m_t = k^1$  当且仅当  $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}^{(k)}$ . 可见, 随机过程  $\{m_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  ( $m_t$  关于  $\Sigma$ -代数  $\mathcal{F}_t$  适应) 完全描述了多自主体通信网络拓扑的动态变化. 注意, 此处未对信道随机丢失、重建在空间域上的相关性作约束, 即信道的随机丢失、重建可能在空间域上相关.

每对邻居自主体间按如下方式进行信息交换: 在通信信道  $(j, i) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  的发送端, 自主体  $j$  将其  $t$  时刻的状态  $x_j(t)$  向自主体  $i$  发送. 考虑到通信信道的丢失、重建及随机通信噪声等不确定因素的影响, 在通信信道  $(j, i)$  的接收端, 自主体  $i$  接收到的信号可表示为:

$$y_{ji}(t) = \begin{cases} x_j(t) + \Sigma_w^{ji} n_w^{ji}(t), & \text{如果 } (j, i) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}} \setminus \mathcal{E}_{ft}, \\ 0, & \text{如果 } (j, i) \in \mathcal{E}_{ft}, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\mathcal{E}_{ft} \subset \mathcal{E}_f$ , 信道  $(l, k) \in \mathcal{E}_{ft}$  当且仅当  $m_t^{lk} = 0$ .  $n_w^{ji}(t)$  为随机可加通信噪声, 将其建模为标准白噪声,  $\Sigma_w^{ji} > 0$  为通信噪声强度.

基于以上的通信机制以及动态系统 (1), 对每个自主体  $i$  ( $i \in \mathcal{V}$ ), 我们欲利用局部量测信息  $\mathcal{U}_i(t) = \{x_i(s), y_{ji}(s), j \in \mathcal{N}_i(s), s \leq t\}$  设计分布式控制协议  $u_i(t)$ , 使对任意的初始状态  $x_1(0), \dots, x_N(0)$ , 自主体系统均可实现平均趋同. 下面给出本文所要研究的两类平均趋同的定义.

**定义 1** (均方趋同) 对任意的初始状态  $x_i(0)$ ,  $i \in \mathcal{V}$ , 如果存在随机变量  $x^*$ , 使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(x_i(t) - x^*)^2 = 0$ , 我们称自主体系统实现均方趋同. 特别地, 当  $x^*$  满足  $E[x^*] =$

1. 本文为方便起见, 将随机过程  $m_t$  在  $t$  时刻的状态为第  $k$  个状态简记为  $m_t = k$ .

$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(0)$ ,  $\text{Var}[x^*] < \infty$  时, 称自主体系统实现渐近无偏均方平均趋同.

**定义 2** (以概率 1 趋同) 对任意的初始状态  $x_i(0)$ ,  $i \in \mathcal{V}$ , 如果存在随机变量  $x^*$ , 使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = x^*$ , a.s., 我们称自主体系统实现以概率 1 趋同. 特别地, 当  $x^*$  满足  $E[x^*] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(0)$ ,  $\text{Var}[x^*] < \infty$  时, 称自主体系统实现渐近无偏以概率 1 平均趋同.

### 3 趋同协议设计及收敛性分析

本节的讨论基于完全概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , 其上有一个非降的  $\Sigma$ -代数族  $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ . 按如下的方式定义算子  $\varphi$  及  $\hat{\varphi}$ : 对矩阵  $L = (L_1, L_2, \dots, L_s)$ , 其中  $L_i = [l_{i1}, l_{i2}, \dots, l_{im}]$ ,  $l_{ij} \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, m$ ,

$$\varphi(L_i) = [l_{i1} \quad l_{i2} \quad \dots \quad l_{im}]^T \in \mathbb{R}^{nm}, \quad \hat{\varphi}(L) = [\varphi(L_1) \quad \varphi(L_2) \quad \dots \quad \varphi(L_s)]^T \in \mathbb{R}^{mns}. \quad (3)$$

可见上述算子将矩阵按列拉直为一向量. 对算子  $\varphi$ , 有如下性质<sup>[15]</sup>:

$$\varphi(LKH) = (H^T \otimes L) \varphi(K), \quad (4)$$

其中  $L, H, K$  为相应维数的矩阵.

在马尔科夫随机切换的通信拓扑下, 每对邻居自主体基于 (2) 式定义的通信信道进行信息交换, 我们为自主体  $i$  ( $i \in \mathcal{V}$ ) 设计如下的连续时间分布式趋同控制:

$$u_i(t) = a(t) \sum_{j \in \mathcal{N}_{it}} a_{ij}(t) (y_{ji}(t) - x_i(t)), \quad (5)$$

其中  $\mathcal{N}_{it}$  表示自主体  $i$  在  $t$  时刻的邻居个体;  $y_{ji}(t)$  由 (2) 式定义;  $a(t)$  为增益函数;  $a_{ij}(t)$  由  $t$  时刻通信拓扑图  $\mathcal{G}_t$  的加权矩阵  $\mathcal{A}_{\mathcal{G}(m_t)}$  决定, 即  $a_{ij}(t) = a_{ij}^{(m_t)}$ . 如果  $\mathcal{N}_{it} = \emptyset$ , 我们将  $\sum_{j \in \mathcal{N}_{it}} (\cdot)$  理解为 0.

将 (2), (5) 式代入 (1) 式, 我们得到如下向量形式的多自主体闭环系统:

$$\frac{dX(t)}{dt} = -a(t) \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(m_t)} X(t) + a(t) \Sigma^{(m_t)} n_w(t), \quad (6)$$

其中  $t \geq 0$ ,  $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T$ ,  $\alpha_i^T(t)$  ( $i \in \mathcal{V}$ ) 为加权矩阵  $\mathcal{A}_{\mathcal{G}_t}$  的第  $i$  行;  $n_w(t) = [n_w^{11^T}(t), \dots, n_w^{N1^T}(t), \dots, n_w^{1N^T}(t), \dots, n_w^{NN^T}(t)]^T$ ,  $\Sigma^{(m_t)} = \text{diag}\{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_N\}$ ,  $\Sigma_i = \alpha_i^T(t) \text{diag}\{\Sigma_w^{1i}, \dots, \Sigma_w^{Ni}\}$ .

多自主体系统 (6) 是由  $N^2$  维标准白噪声向量驱动随机系统, 可用如下的 Itô 随机微分方程描述:

$$dX(t) = -a(t) \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(m_t)} X(t) dt + a(t) \Sigma^{(m_t)} dW(t), \quad (7)$$

其中  $W(t)$  为  $N^2$  维标准布朗运动.

为证明闭环系统 (7) 的收敛性, 我们作如下的假设:

**A1)** 有向图  $\mathcal{G}^{(i)}, 1 \leq i \leq s$  为平衡图, 并且拓扑图集  $\mathcal{C} = \{\mathcal{G}^{(i)}, 1 \leq i \leq s\}$  的并集  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$  含有一棵生成树.

**A2)**  $\{(m_t, \mathcal{F}_t), t \in \mathbb{R}^+\}$  是轨道右连续的时齐遍历马氏链, 具有有限状态空间  $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, s\}$ .  $Q = [q_{ij}]_{1 \leq i, j \leq s}$  是马氏链  $m_t$  的转移密度阵, 并且满足  $\sum_{j:j \neq i} q_{ij} = \sum_{j:j \neq i} q_{ji}$ .  $\{(m_t, \mathcal{F}_t), t \in \mathbb{R}^+\}$  具有初始概率分布  $\{q_i, i \in \mathcal{S}\}$ .

**A3)** 初始状态向量  $X(0)$ , 满足  $E\|X(0)\|^2 < \infty$ .  $\{W(t), \mathcal{F}_t\}, \{m_t, \mathcal{F}_t\}, X(0)$  相互独立.

**A4)** 趋同增益  $a(t)$  满足:  $a(t) \geq 0; \int_{t=0}^{\infty} a(t)dt = \infty; \int_{t=0}^{\infty} a^2(t)dt < \infty$ .

注 1 由马氏链理论<sup>[16]</sup>知, 当有限状态马氏链的转移概率矩阵  $P(t) = [p_{ij}(t)]$  标准时, 即  $\lim_{t \rightarrow 0^+} P(t) = I, p_{ij}(t) = P(m_{t+s} = j | m_s = i), \forall s \geq 0$ , 则  $Q$  是保守的, 即  $q_{ii} = - \sum_{j:j \neq i} q_{ij}, 0 \leq q_{ij} < \infty$ . A1) 中要求  $\sum_{j:j \neq i} q_{ij} = \sum_{j:j \neq i} q_{ji}$ , 保证了  $Q$  的双随机性, 也即由  $Q$  生成的有向图为平衡图. 从而  $\frac{Q+Q^T}{2}$  为对称转移密度阵. 又由  $m_t$  的遍历性 (即  $m_t$  不可约正常返) 知,  $\frac{Q+Q^T}{2}$  不可约, 由其生成的有向图是强连通的. 定义  $p_i(t) = P(m_t = i), i \in \mathcal{S}$ , 则由马氏链  $m_t$  的遍历性知, 存在不依赖于初始分布的极限概率, 即平稳分布  $\{\pi_i, i \in \mathcal{S}\}, \sum_{i=1}^s \pi_i = 1$ , 满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{j \in \mathcal{S}} \{ |p_j(t) - \pi_j| \} = 0$ . 文 [13] 将趋同增益条件 A4) 中的  $\int_{t=0}^{\infty} a(t)dt = \infty$  和  $\int_{t=0}^{\infty} a^2(t)dt < \infty$  分别称为收敛性条件和鲁棒性条件.

下面我们研究闭环系统 (7) 的收敛性. 我们知道, 系统 (7) 为时变随机马尔科夫跳变系统, 其显著的特点是, 状态  $\{X(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  不是马氏过程, 而扩张状态向量  $\{(X(t), m_t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  却是马氏过程, 因此我们可以借助随机过程  $(X(t), m_t)$  的无穷小生成元, 或广义 Itô 公式<sup>[17]</sup>等工具, 分析动态系统 (7) 的性质.

**定理 1** 假设 A1)–A4) 成立. 在分布式趋同协议 (5) 下, 系统 (1)–(2) 实现渐近无偏均方平均趋同, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\|X(t) - x^* 1_N\|^2 = 0, \tag{8}$$

其中  $x^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(0) + \frac{1}{N} \int_0^{\infty} a(t) 1^T \Sigma^{(m_t)} dW(t)$ .

证 由假设 A1), 容易得到  $1^T \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(m_t)} = 0$ . 因此系统 (7) 可写成如下形式:

$$d\delta(t) = -a(t) \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(m_t)} \delta(t) dt + a(t) (I - J) \Sigma^{(m_t)} dW(t), \tag{9}$$

其中  $\delta(t) = X(t) - JX(t), J = \frac{1}{N} 1_N 1_N^T, \Sigma^{(m_t)}$  由 (6) 式定义.

下面考察  $V(t) = E\delta(t)\delta^T(t)$ . 定义  $V_i(t) = E\delta(t)\delta^T(t) 1_{[m_t=i]}$ , 显然  $V(t) = \sum_{i=1}^s V_i(t)$ . 由 (9) 式及文 [18] 中引理 4.2, 利用 Itô 公式<sup>[19]</sup>, 我们有

$$\begin{aligned} dV_i(t) &= E \left[ (d\delta(t)) \delta^T(t) 1_{[m_t=i]} + \delta(t) (d\delta^T(t)) 1_{[m_t=i]} + d\delta(t) d\delta^T(t) 1_{[m_t=i]} + \delta(t) \delta^T(t) d1_{[m_t=i]} \right] \\ &= -a(t) \left[ \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(i)} V_i(t) + V_i(t) \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(i)T} \right] dt + a^2(t) \Sigma^{(i)} \Sigma^{(i)T} p_i(t) dt + \sum_{j=1}^s q_{ji} V_j(t) dt + o(dt), \end{aligned}$$

或等价地

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = -a(t) \left[ \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(i)} V_i(t) + V_i(t) \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(i)\text{T}} \right] + a^2(t) \Sigma^{(i)} \Sigma^{(i)\text{T}} p_i(t) + \sum_{j=1}^s q_{ji} V_j(t). \quad (10)$$

记  $R_i(t) = \Sigma^{(i)} \Sigma^{(i)\text{T}} p_i(t)$ ,  $\bar{V}(t) = [V_1(t), V_2(t), \dots, V_s(t)]$ , 利用 (4) 式及 Kronecker 和的定义, 由 (10) 式知,

$$\frac{d\varphi(V_i(t))}{dt} = -a(t) \left( \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(i)} \oplus \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(i)} \right) \varphi(V_i(t)) + (Q_i^{\text{T}} \otimes I_{N^2}) \hat{\varphi}(\bar{V}(t)) + a^2(t) \varphi(R_i(t)). \quad (11)$$

其中  $Q_i$  是矩阵  $Q$  的第  $i$  列. 记  $\bar{R}(t) = [R_1(t), R_2(t), \dots, R_s(t)]$ . 由 (11) 式知,

$$\frac{d\hat{\varphi}(\bar{V}(t))}{dt} = (-a(t) \Gamma_L + Q^{\text{T}} \otimes I_{N^2}) \hat{\varphi}(\bar{V}(t)) + a^2(t) \hat{\varphi}(\bar{R}(t)), \quad (12)$$

其中  $\Gamma_L = \text{diag}\{\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(1)} \oplus \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(1)}, \dots, \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(s)} \oplus \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(s)}\}$ ,  $\hat{\varphi}(\bar{V}(0)) = [q_1 \varphi^{\text{T}}(V(0)), \dots, q_s \varphi^{\text{T}}(V(0))]^{\text{T}}$ .

注意到  $\{\mathcal{G}^{(i)}, i \in \mathcal{S}\}$  为平衡图集合, 由文 [5] 中的定理 7 及 Kronecker 和定义知,  $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(i)} \oplus \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(i)} + \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(i)\text{T}} \oplus \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(i)\text{T}} = 2(\mathcal{L}_{\hat{\mathcal{G}}^{(i)}} \oplus \mathcal{L}_{\hat{\mathcal{G}}^{(i)}})$ ,  $i \in \mathcal{S}$ , 其中  $\hat{\mathcal{G}}^{(i)}$  为  $\mathcal{G}^{(i)}$  的对称化图,  $\mathcal{L}_{\hat{\mathcal{G}}^{(i)}}$  是无向图  $\hat{\mathcal{G}}^{(i)}$  的 Laplacian 矩阵. 从而由 (12) 式知,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\varphi}^{\text{T}}(\bar{V}(t))\hat{\varphi}(\bar{V}(t))}{dt} &= 2\hat{\varphi}^{\text{T}}(\bar{V}(t)) \left( -a(t) \Gamma_{\hat{L}} + \hat{Q} \otimes I_{N^2} \right) \hat{\varphi}(\bar{V}(t)) \\ &\quad + 2a^2(t) \hat{\varphi}^{\text{T}}(\bar{V}(t)) \hat{\varphi}(\bar{R}(t)), \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $\Gamma_{\hat{L}}$  是将  $\Gamma_L$  中的  $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(i)}$  替换为  $\mathcal{L}_{\hat{\mathcal{G}}^{(i)}}$  得到的新  $\Gamma_L$ ,  $\hat{\mathcal{G}}^{(i)}$  为  $\mathcal{G}^{(i)}$  的对称化图,  $\mathcal{L}_{\hat{\mathcal{G}}^{(i)}}$  是无向图  $\hat{\mathcal{G}}^{(i)}$  的 Laplacian 阵. 由于  $Q$  为双随机转移密度阵,  $\hat{Q} = (Q + Q^{\text{T}})/2$  是不可约对称转移密度阵.

由假设 A1) 及文 [14] 中的推论 3.7 知,  $\Gamma_{\hat{L}} - \hat{Q} \otimes I_{N^2}$  的零特征根的代数重度为 1, 故可将视其为强连通无向图所对应的 Laplacian 矩阵. 进而有  $\min_{x \neq 0, 1^{\text{T}} x = 0} \frac{x^{\text{T}}(\Gamma_{\hat{L}} - \hat{Q} \otimes I_{N^2})x}{\|x\|^2} = \lambda_2^{[20]}$ , 其中  $\lambda_2$  是矩阵  $\Gamma_{\hat{L}} - \hat{Q} \otimes I_{N^2}$  的最小非零特征根. 由于  $a(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , 故存在  $t_0$ , 使当  $t \geq t_0$  时,  $a(t) \leq \min\{1, \lambda_2\}$ . 注意到  $\hat{Q}$  的半负定性,  $1^{\text{T}} \hat{\varphi}(\bar{V}(t)) = 0$ , 以及不等式  $2x^{\text{T}}y \leq \epsilon x^{\text{T}}x + \epsilon^{-1}y^{\text{T}}y$ ,  $\forall x, y \in \mathcal{R}^{sN^2}$ ,  $\epsilon > 0$ , 由 (13) 式知,  $\forall t \geq t_0$  有

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\varphi}^{\text{T}}(\bar{V}(t))\hat{\varphi}(\bar{V}(t))}{dt} &\leq 2\hat{\varphi}^{\text{T}}(\bar{V}(t)) \left( -a(t) \Gamma_{\hat{L}} + a(t) \hat{Q} \otimes I_{N^2} \right) \hat{\varphi}(\bar{V}(t)) \\ &\quad + a^2(t) \hat{\varphi}^{\text{T}}(\bar{V}(t)) \hat{\varphi}(\bar{V}(t)) + a^2(t) \hat{\varphi}^{\text{T}}(\bar{R}(t)) \hat{\varphi}(\bar{R}(t)) \\ &\leq (-2\lambda_2 a(t) + a^2(t)) \|\hat{\varphi}(\bar{V}(t))\|^2 + a^2(t) \|\hat{\varphi}(\bar{R}(t))\|^2 \\ &\leq -\lambda_2 a(t) \|\hat{\varphi}(\bar{V}(t))\|^2 + a^2(t) \|\hat{\varphi}(\bar{R}(t))\|^2. \end{aligned} \quad (14)$$

由此及比较定理 [21] 知,

$$\hat{\varphi}^{\text{T}}(\bar{V}(t)) \hat{\varphi}(\bar{V}(t)) \leq \|\hat{\varphi}(\bar{V}(t_0))\|^2 I_1(t) + I_2(t), \quad (15)$$

其中  $I_1(t) = \exp\{-\lambda_2 \int_{t_0}^T a(u)du\}$ ,  $I_2(t) = \int_{t_0}^T \exp\{-\lambda_2 \int_s^T a(u)du\} a^2(s) \hat{\varphi}^T(\bar{R}(s)) \hat{\varphi}(\bar{R}(s)) ds$ . 由 (13) 式易见,  $\|\hat{\varphi}(\bar{V}(t_0))\|^2$  有界, 故由  $\int_{t_0}^\infty a(s)ds = \infty$  及  $\lambda_2 > 0$  知,  $\lim_{t \rightarrow \infty} I_1(t) = 0$ . 由注 1 知, 存在  $t_1 > 0$ , 使得当  $t \geq t_1$  时,

$$|\hat{\varphi}^T(\bar{R}(t)) \hat{\varphi}(\bar{R}(t)) - \hat{\varphi}^T(\bar{R}) \hat{\varphi}(\bar{R})| < \varepsilon, \tag{16}$$

其中  $\bar{R} = [R_1, R_2, \dots, R_s]$ ,  $R_i = \Sigma^{(i)} \Sigma^{(i)T} \pi_i$ ,  $i \in \mathcal{S}$ . 又由于  $\int_0^\infty a^2(t)dt < \infty$ , 故存在  $t_2 > 0$ , 使得当  $t \geq t_2$  时,  $\int_{t_2}^\infty a^2(t)dt < \varepsilon$ . 由此, 并记  $t_3 = \max\{t_1, t_2\}$ , 我们有

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \int_{t_0}^{t_3} \exp\left\{-\lambda_2 \int_s^T a(u)du\right\} a^2(s) \|\hat{\varphi}(\bar{R}(s))\|^2 ds \\ &\quad + \int_{t_3}^t \exp\left\{-\lambda_2 \int_s^T a(u)du\right\} a^2(s) \|\hat{\varphi}(\bar{R}(s))\|^2 ds \\ &\leq \exp\left\{-\lambda_2 \int_{t_3}^T a(u)du\right\} \int_{t_0}^{t_3} a^2(s) \|\hat{\varphi}(\bar{R}(s))\|^2 ds + (\hat{\varphi}^T(\bar{R}) \hat{\varphi}(\bar{R}) + \varepsilon) \int_{t_3}^t a^2(s) ds \\ &\leq \exp\left\{-\lambda_2 \int_{t_3}^T a(u)du\right\} \int_{t_0}^{t_3} a^2(s) \|\hat{\varphi}(\bar{R}(s))\|^2 ds + (\hat{\varphi}^T(\bar{R}) \hat{\varphi}(\bar{R}) + \varepsilon) \varepsilon \\ &\rightarrow (\hat{\varphi}^T(\bar{R}) \hat{\varphi}(\bar{R}) + \varepsilon) \varepsilon, \quad \text{当 } t \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{17}$$

所以, 由  $\varepsilon$  的任意性知,  $\lim_{t \rightarrow \infty} I_2(t) = 0$ , 进而  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\varphi}(\bar{V}(t))\| = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|V(t)\| = 0$ . 由于  $E\|\delta(t)\|^2 = \text{tr}(V(t))$ , 所以  $\lim_{t \rightarrow \infty} E\|\delta(t)\|^2 = 0$ .

注意到  $J\mathcal{L}_G^{(m_t)} = 0$ , 由 (7) 式知

$$d(JX(t) - JX(0)) = a(t)J\Sigma^{(m_t)}dW(t),$$

等价于

$$JX(t) = JX(0) + \int_0^T a(s)J\Sigma^{(m_s)}dW(s).$$

从而, 若令  $x^* = \frac{1}{N}1^T X(0) + \frac{1}{N} \int_0^\infty a(t)1^T \Sigma^{(m_t)}dW(t)$ , 注意到 A4), 由 Itô 同构性质得到

$$\begin{aligned} E\|JX(t) - x^*1\|^2 &= E\left\|\int_t^\infty a(s)J\Sigma^{(m_s)}dW(s)\right\|^2 \\ &= E \int_t^\infty \|J\Sigma^{(m_s)}\|_F^2 a^2(s) ds \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq s} \|J\Sigma^{(m_i)}\|_F^2 \int_t^\infty a^2(s) ds = o(1), \quad \text{当 } t \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{18}$$

由此及  $\lim_{t \rightarrow \infty} E\|\delta(t)\|^2 = 0$ , 并注意到

$$\begin{aligned} E[x^*] &= \frac{1}{N} 1^T X(0), \\ \text{Var}[x^*] &= E \left( \frac{1}{N} \int_0^\infty a(t) 1^T \Sigma^{(m_t)} dW(t) \right)^2 \\ &= \frac{1}{N^2} E \int_0^\infty a^2(t) \|1^T \Sigma^{(m_t)}\|^2 dt \\ &\leq \frac{\max_{1 \leq i \leq s} \|1^T \Sigma^{(m_i)}\|^2}{N^2} \int_0^\infty a^2(t) dt < \infty, \end{aligned}$$

知定理结论成立.

**定理 2** 假设 A1)–A4) 成立. 在分布式趋同协议 (5) 下, 系统 (1)–(2) 实现渐近无偏以概率 1 平均趋同, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = x^* 1_N$ , 其中  $x^*$  在定理 1 中定义.

证 定义  $\widehat{V}(t) = \widehat{\delta}^T(t) \widehat{\delta}(t)$ ,  $\widehat{\delta}(t) = X(t) - x^* 1_N$ . 注意到 (7) 式, 以及  $\mathcal{G}_t$  为平衡图, 利用 Itô 公式得

$$\begin{aligned} d\widehat{V}(t) &= -a(t) \widehat{\delta}^T(t) \left( \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(m_t)T} + \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(m_t)} \right) \widehat{\delta}(t) dt + a^2(t) \text{tr} \left( \Sigma^{(m_t)T} \Sigma^{(m_t)} \right) dt + 2a(t) \widehat{\delta}^T(t) \Sigma^{(m_t)} dW(t) \\ &= -2a(t) \widehat{\delta}^T(t) \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(m_t)} \widehat{\delta}(t) dt + a^2(t) \text{tr} \left( \Sigma^{(m_t)T} \Sigma^{(m_t)} \right) dt + 2a(t) \widehat{\delta}^T(t) \Sigma^{(m_t)} dW(t). \end{aligned}$$

对上式两边取积分得到

$$\begin{aligned} \widehat{V}(t) &= \widehat{V}(0) - 2 \int_0^T a(s) \widehat{\delta}^T(s) \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(m_s)} \widehat{\delta}(s) ds + \int_0^T a^2(s) \text{tr} \left( \Sigma^{(m_s)T} \Sigma^{(m_s)} \right) ds \\ &\quad + 2 \int_0^T a(s) \widehat{\delta}^T(s) \Sigma^{(m_s)} dW(s). \end{aligned} \quad (19)$$

由文 [17] 知, 马尔科夫跳变随机微分方程 (9) 的解  $\widehat{\delta}(t)$ ,  $t \geq 0$  存在唯一, 并且

$$E \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} \|\widehat{\delta}(s)\|^2 \right] < \infty, \quad t \geq 0.$$

所以  $\{\int_0^T a(s) \widehat{\delta}^T(s) \Sigma^{(m_s)} dW(s), \mathcal{F}_t\}$  是鞅, 即  $E[\int_s^T a(u) \widehat{\delta}^T(u) \Sigma^{(m_u)} dW(u) | \mathcal{F}_s] = 0$ ,  $\forall s \leq t$ . 由此及 (19) 式, 并记  $\widehat{V}_1(t) = \widehat{V}(t) - \int_0^T a^2(s) \text{tr} \left( \Sigma^{(m_s)T} \Sigma^{(m_s)} \right) ds$ , 我们有

$$\begin{aligned} E \left[ \widehat{V}_1(t) - \widehat{V}_1(s) \middle| \mathcal{F}_s \right] &= E \left[ -2 \int_s^T a(u) \widehat{\delta}^T(u) \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(m_u)} \widehat{\delta}(u) du + 2 \int_s^T a(u) \widehat{\delta}^T(u) \Sigma^{(m_u)} dW(u) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= E \left[ -2 \int_s^T a(u) \widehat{\delta}^T(u) \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(m_u)} \widehat{\delta}(u) du \middle| \mathcal{F}_s \right] \leq 0, \end{aligned}$$

所以  $\{\widehat{V}_1(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  是连续上鞅. 上式用到  $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(m_t)}$  的半正定性. 注意到  $\widehat{V}(t) \geq 0$ , 由 A4) 知,

$$\sup_{t \geq 0} E \widehat{V}_1(t)^- \leq \int_0^\infty a^2(t) \max_{1 \leq i \leq s} \text{tr} \left( \Sigma^{(i)T} \Sigma^{(i)} \right) dt < \infty.$$



由连续上鞅收敛定理 [22] 知, 存在随机变量  $\widehat{V}^*$ , 使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{V}_1(t) = \widehat{V}^*$ , a.s. 从而  $\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{V}(t) = \widehat{V}^* + \int_0^\infty a^2(t) \text{tr}(\Sigma^{(m_t)\text{T}} \Sigma^{(m_t)}) dt$ , a.s. 又由定理 1 知,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{V}(t) = 0$ , a.s. 从而定理 2 得证.

定理 1 和定理 2 给出了各自主体具有相同增益函数  $a(t)$  时的趋同性分析. 然而在实际应用中, 由于自主体  $i$  设计的增益函数  $a(t)$  与真实的增益函数  $a_i(t)$  往往存在着误差, 因此需要分析不同增益函数对各自主体趋同性的影响. 对应于 (7), 此时的多自主体闭环系统可用如下的 Itô 随机微分方程描述:

$$dX(t) = -A(t)\mathcal{L}_G^{(m_t)} X(t)dt + A(t)\Sigma^{(m_t)}dW(t), \tag{20}$$

其中  $A(t) = \text{diag}\{a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)\}$ ,  $\Sigma^{(m_t)}$ ,  $W(t)$  的定义与 (7) 式相同.

对闭环系统 (20) 的趋同性分析, 我们有如下的定理.

**定理 3** 假设 A1)–A3) 成立, 若对每个  $i$  ( $i \in \mathcal{V}$ ), 满足

$$\int_0^\infty a_i(t)dt = \infty, \tag{21}$$

$$\int_0^\infty a_i^2(t)dt < \infty, \tag{22}$$

$$\int_{t=0}^\infty \max_{1 \leq i, j \leq N} |a_i(t) - a_j(t)| dt < \infty, \tag{23}$$

则闭环系统 (20) 实现均方趋同和以概率 1 趋同, 其中

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(0) + \frac{1}{N} 1_N^T \int_0^\infty \Delta(t)\mathcal{L}_G^{(m_t)} X(t)dt + \frac{1}{N} 1_N^T \int_0^\infty A(t)\Sigma^{(m_t)}dW_t, \Delta(t) \\ &= \text{diag}\{\Delta_1(t), \Delta_2(t), \dots, \Delta_N(t)\}, \Delta_i(t) \\ &= \bar{a}(t) - a_i(t), \bar{a}(t) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i(t). \end{aligned}$$

证 将闭环系统 (20) 写为如下动态方程:

$$d\delta(t) = -\bar{a}(t)\mathcal{L}_G^{(m_t)}\delta(t)dt + (I - J)\Delta(t)\mathcal{L}_G^{(m_t)}\delta(t)dt + (I - J)A(t)\Sigma^{(m_t)}dW(t). \tag{24}$$

类似于 (10) 式的推导, 由 (24) 式, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} &= -\bar{a}(t) \left( \mathcal{L}_G^{(i)} V_i(t) + V_i(t)\mathcal{L}_G^{(i)\text{T}} \right) + (I - J)\Delta(t)\mathcal{L}_G^{(i)} V_i(t) + V_i(t)\mathcal{L}_G^{(i)\text{T}} \Delta(t)(I - J) \\ &\quad + (I - J)A(t)\Sigma^{(i)}\Sigma^{(i)\text{T}}A(t)(I - J)p_i(t) + \sum_{j=1}^s q_{ji}V_j(t). \end{aligned} \tag{25}$$

由此知

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(V_i(t))}{dt} &= -\bar{a}(t) \left[ \mathcal{L}_G^{(i)} \oplus \mathcal{L}_G^{(i)} \right] \varphi(V_i(t)) + \left[ \left( (I - J)\Delta(t)\mathcal{L}_G^{(i)} \right) \oplus \left( (I - J)\Delta(t)\mathcal{L}_G^{(i)\text{T}} \right) \right] \varphi(V_i(t)) \\ &\quad + \left( (I - J)A(t) \right) \otimes \left( (I - J)A(t) \right) \varphi(R_i(t)) + \left( Q_i^T \otimes I_{N^2} \right) \widehat{\varphi}(\overline{V}(t)). \end{aligned} \tag{26}$$

注意到 (12) 式中  $\Gamma_L$  的定义, 并记

$$\begin{aligned}\Gamma_{\Delta}^{(i)} &= \left( (I - J)\Delta(t)\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(i)} \right) \oplus \left( (I - J)\Delta(t)\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(i)} \right), \\ \Gamma_{\Delta} &= \text{diag} \left\{ \Gamma_{\Delta}^{(1)}, \Gamma_{\Delta}^{(2)}, \dots, \Gamma_{\Delta}^{(s)} \right\},\end{aligned}\quad (27)$$

由 (26) 式知,

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\varphi}(\bar{V}(t))}{dt} &= (-\bar{\alpha}(t)\Gamma_L + Q^T \otimes I_{N^2}) \hat{\varphi}(\bar{V}(t)) + \Gamma_{\Delta} \hat{\varphi}(\bar{V}(t)) \\ &\quad + I_s \otimes ((I - J)A(t)) \otimes ((I - J)A(t)) \hat{\varphi}(\bar{R}(t)).\end{aligned}\quad (28)$$

注意到  $\{\mathcal{G}^{(i)}, i \in \mathcal{S}\}$  为平衡图集合, 从而由 (28) 式知,

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\varphi}^T(\bar{V}(t))\hat{\varphi}(\bar{V}(t))}{dt} &= 2\hat{\varphi}^T(\bar{V}(t)) \left( -\bar{\alpha}(t)\Gamma_{\hat{L}} + \hat{Q} \otimes I_{N^2} \right) \hat{\varphi}(\bar{V}(t)) + 2\hat{\varphi}^T(\bar{V}(t))\Gamma_{\Delta}^T \hat{\varphi}(\bar{V}(t)) \\ &\quad + 2\hat{\varphi}^T(\bar{V}(t)) [I_s \otimes ((I - J)A(t)) \otimes ((I - J)A(t))] \hat{\varphi}(\bar{R}(t)),\end{aligned}\quad (29)$$

其中  $\Gamma_{\hat{L}}, \hat{Q}$  与 (13) 式中的定义相同. 注意到 (21) 式, 由 (23) 式容易得到,  $\Delta_i(t) = o(\bar{\alpha}(t))$ . 从而由 (27) 式中  $\Gamma_{\Delta}$  的定义知,  $\|\Gamma_{\Delta}\| = o(\bar{\alpha}(t))$ . 由 Kronecker 和的定义, 将  $((I - J)A(t)) \otimes ((I - J)A(t))$  写为如下形式:

$$\begin{aligned}& ((I - J)A(t)) \otimes ((I - J)A(t)) \\ &= \bar{\alpha}^2(t)(I - J) \otimes (I - J) - \bar{\alpha}(t)(I - J) \otimes [(I - J)\Delta(t)] \\ &\quad - \bar{\alpha}(t)[(I - J)\Delta(t)] \otimes (I - J) + [(I - J)\Delta(t)] \otimes [(I - J)\Delta(t)].\end{aligned}$$

由此及 (29) 式, 类似于 (14) 式的推导知, 存在  $t_0 \geq 0$ , 使得当  $t \geq t_0$  时, 有

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\varphi}^T(\bar{V}(t))\hat{\varphi}(\bar{V}(t))}{dt} &\leq -2\bar{\alpha}(t)\hat{\varphi}^T(\bar{V}(t)) \left( \Gamma_{\hat{L}} + \hat{Q} \otimes I_{N^2} \right) \hat{\varphi}(\bar{V}(t)) + 2\|\Gamma_{\Delta}\| \cdot \|\hat{\varphi}(\bar{V}(t))\|^2 \\ &\quad + 2\bar{\alpha}^2(t)\|I_s \otimes (I - J) \otimes (I - J)\| \cdot \|\hat{\varphi}(\bar{V}(t))\| \cdot \|\hat{\varphi}(\bar{R}(t))\| \\ &\quad + 2\bar{\alpha}(t) (\|I_s \otimes (I - J) \otimes [(I - J)\Delta(t)]\| + \|I_s \otimes [(I - J)\Delta(t)] \otimes (I - J)\| \\ &\quad + \|I_s \otimes [(I - J)\Delta(t)] \otimes [(I - J)\Delta(t)]\|) \|\hat{\varphi}(\bar{V}(t))\| \cdot \|\hat{\varphi}(\bar{R}(t))\| \\ &\leq [-2\lambda_2\bar{\alpha}(t) + O(\bar{\alpha}^2(t)) + o(\bar{\alpha}^2(t))] \|\hat{\varphi}(\bar{V}(t))\|^2 \\ &\quad + (O(\bar{\alpha}^2(t)) + o(\bar{\alpha}^2(t))) \|\hat{\varphi}(\bar{R}(t))\|^2 \\ &\leq -\lambda_2\bar{\alpha}(t)\|\hat{\varphi}(\bar{V}(t))\|^2 + O(\bar{\alpha}^2(t))\|\hat{\varphi}(\bar{R}(t))\|^2.\end{aligned}\quad (30)$$

从而类似 (14) 式, 利用比较定理<sup>[21]</sup>, 由假设 A1), (21), (22), (30) 式知,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\varphi}(\bar{V}(t))\| = 0$ , 进而  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|V(t)\| = 0$ . 故  $\lim_{t \rightarrow \infty} E\|\delta(t)\|^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} E\text{tr}(V(t)) = 0$ .

由 (20) 式知,

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(0) + \frac{1}{N} 1_N^T \int_0^T \Delta(s)\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{(m_s)} \delta(s) ds + \frac{1}{N} 1_N^T \int_0^T A(s)\Sigma^{(m_s)} dW(s).$$

由文 [17] 知，马氏跳变随机微分方程 (24) 的解  $\delta(t), t \geq 0$  存在唯一，并且

$$E \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} \|\delta(s)\|^2 \right] < \infty, \quad t \geq 0. \tag{31}$$

故由此及 (22), (23), (31) 式，利用 Itô 同构性质得

$$\begin{aligned} E \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(t) - x^* \right)^2 &= \frac{1}{N^2} E \left( \int_t^\infty \mathbf{1}_N^\top \Delta(s) \mathcal{L}_G^{(m_s)} \delta(s) ds + \int_t^\infty \mathbf{1}_N^\top A(s) \Sigma^{(m_s)} dW(s) \right)^2 \\ &\leq \frac{2}{N} \max_{1 \leq i \leq s} \|\mathcal{L}_G^{(i)}\|^2 E \sup_{t \geq 0} \|\delta(t)\|^2 \left( \int_t^\infty \max_{1 \leq i, j \leq N} |a_i(s) - a_j(s)| ds \right)^2 \\ &\quad + \frac{2}{N} \max_{1 \leq i \leq s} \|\Sigma^{(i)}\|_F^2 \max_{1 \leq i \leq N} \int_t^\infty a_i^2(s) ds = o(1), \quad \text{当 } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

所以闭环系统 (20) 均方趋同。

下证明闭环系统 (20) 以概率 1 趋同。采用定理 2 中的符号，由 (24) 式知，

$$\begin{aligned} d\widehat{V}(t) &= -\delta^\top(t) \left[ \mathcal{L}_G^{(m_t)\top} A(t) + A(t) \mathcal{L}_G^{(m_t)} \right] \delta(t) dt \\ &\quad + \text{tr} \left( A^2(t) \Sigma^{(m_t)} \Sigma^{(m_t)\top} \right) dt + 2\delta^\top(t) A(t) \Sigma^{(m_t)} dW(t). \end{aligned}$$

对上式两边取积分得到

$$\begin{aligned} \widehat{V}(t) &= \widehat{V}(0) - \int_0^t \delta^\top(s) \left[ \mathcal{L}_G^{(m_s)\top} A(s) + A(s) \mathcal{L}_G^{(m_s)} \right] \delta(s) ds \\ &\quad + \int_0^t \left\| A(s) \Sigma^{(m_s)} \right\|_F^2 ds + 2 \int_0^t \delta^\top(s) A(s) \Sigma^{(m_s)} dW(s). \end{aligned} \tag{32}$$

由 (31) 式知， $\{\int_0^t \delta^\top(s) A(s) \Sigma^{(m_s)} dW(s), \mathcal{F}_t\}$  是鞅，即  $E[\int_s^t \delta^\top(u) A(u) \Sigma^{(m_u)} dW(u) | \mathcal{F}_s] = 0, \forall s \leq t$ 。由此及 (32) 式，并定义  $\widehat{V}_1(t) = \widehat{V}(t) - \int_0^t \left\| A(s) \Sigma^{(m_s)} \right\|_F^2 ds - \int_0^t \delta^\top(s) [\mathcal{L}_G^{(m_s)\top} \Delta(s) + \Delta(s) \mathcal{L}_G^{(m_s)}] \delta(s) ds$ ，则有

$$E \left[ \widehat{V}_1(t) - \widehat{V}_1(s) | \mathcal{F}_s \right] = E \left[ -2 \int_s^t \bar{a}(u) \delta^\top(u) \mathcal{L}_G^{(m_u)} \delta(u) du | \mathcal{F}_s \right] \leq 0. \tag{33}$$

故  $\{\widehat{V}_1(t), \mathcal{F}(t), t \geq 0\}$  是连续上鞅。上式用到矩阵  $\mathcal{L}_G^{(m_t)}, t \geq 0$  的半正定性。注意到  $\widehat{V}(t) \geq 0$ ，由 (22), (23), (31) 式及 Lyapunov 不等式 [23] 知，

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} E \widehat{V}_1(t)^- &\leq \int_0^\infty \max_{1 \leq i \leq s} \left\| A(t) \Sigma^{(i)} \right\|_F^2 dt + 2 \max_{1 \leq i \leq s} \|\mathcal{L}_G^{(i)}\| \left( E \sup_{t \geq 0} \|\delta(t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \int_0^\infty \max_{1 \leq i, j \leq N} |a_i(t) - a_j(t)| dt < \infty. \end{aligned}$$

由连续上鞅收敛定理 [22] 知，存在随机变量  $\widehat{V}^*$ ，使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{V}_1(t) = \widehat{V}^*$ ，a.s. 从而有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{V}(t) = \widehat{V}^* + \int_0^\infty \left\| A(t) \Sigma^{(m_t)} \right\|_F^2 dt + \int_0^\infty \delta^\top(t) [\mathcal{L}_G^{(m_t)\top} \Delta(t) + \Delta(t) \mathcal{L}_G^{(m_t)}] \delta(t) dt$ 。又由于已证得  $\lim_{t \rightarrow \infty} E \|x_i(t) - x^*\|^2 = 0, i \in \mathcal{V}$ ，所以  $\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{V}(t) = 0$ ，a.s.

### 4 仿真算例

考虑三个自主体组成的自主体网络 (见图 1). 各自主体的动态方程由 (1) 给出, 系统初始状态取为  $X(0) = [4, 1, -5]^T$ . 自主体系统的通信拓扑切换由时齐遍历马氏链  $m_t$  决定,  $m_t$  的状态空间为  $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$ , 初始概率分布为  $q_1 = q_2 = q_3 = \frac{1}{3}$ , 状态转移密度阵  $Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ . 状态  $i (i = 1, 2, 3)$  对应的自主体通信拓扑图为  $\mathcal{G}^{(i)} = \{\mathcal{V} = \{1, 2, 3\}, \mathcal{E}_{\mathcal{G}^{(i)}}, \mathcal{A}_{\mathcal{G}^{(i)}}\}$ , 其中邻接矩阵

$$\mathcal{A}_{\mathcal{G}^{(1)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{\mathcal{G}^{(2)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{\mathcal{G}^{(3)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

自主体间的随机通信噪声强度取为  $\Sigma_w^{ji} = 1, j \in \mathcal{N}_{it}, i = 1, 2, 3$ .

现分析应用趋同协议 (5) 后的闭环系统. 首先, 我们选取趋同增益函数  $a(t) = \frac{1}{t+1}$ , 此时, 假设 A1)–A4) 均成立. 闭环系统 (7) 的状态如图 2 所示. 可以看出, 在趋同协议 (5) 的作用下, 自主体系统的状态随着时间的推移最终趋向于初始状态的均值. 这验证了定理 1 和定理 2 的结论. 其次, 为考察不同趋同增益函数对自主体系统趋同性的影响, 我们选取  $a_i(t) = \frac{t+i}{(t+1)^2}$ , 此时假设 A1)–A3), (21)–(23) 式成立. 闭环系统 (20) 的状态轨迹如图 3 所示. 可以看出, 自主体系统的状态随着时间的推移实现趋同, 但趋同值与初始状态平均值不同. 这验证了定理 3 的结论.

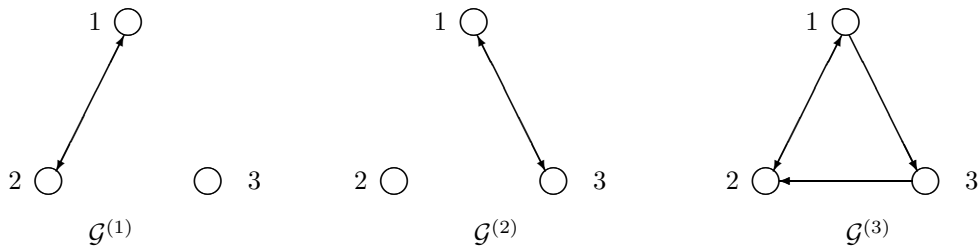


图 1 马氏链  $m_t$  各状态对应的通信拓扑图

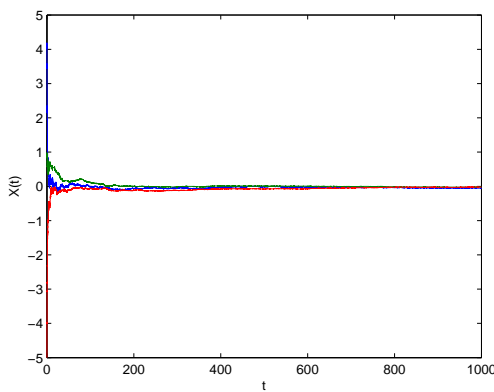


图 2 趋同增益  $a(t) = \frac{1}{t+1}$  时各自主体的状态轨迹

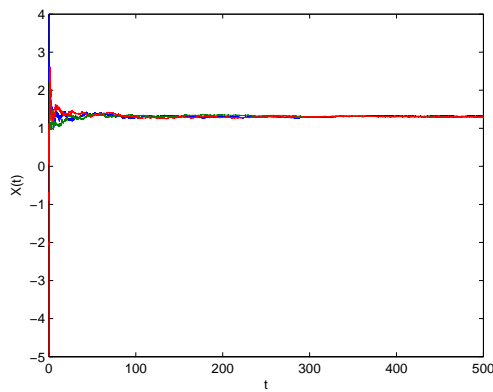


图 3 趋同增益  $a_i(t) = \frac{t+i}{(t+1)^2}$  时各自主体的状态轨迹

## 5 结束语

本文研究了基于不可靠通信网络的连续时间多自主体系统的趋同控制. 设计了随机逼近型趋同协议用以克服随机通信噪声和马尔科夫拓扑切换的影响, 证明了拓扑联合连通、马氏链遍历以及趋同增益条件, 可保证多自主体系统实现渐近无偏均方平均趋同和以概率 1 平均趋同. 对各自主体具有不同增益函数的情形, 我们得出增益函数的差异可使自主体均方趋同及以概率 1 趋同的无偏性受到影响. 对于由连续时间高阶一般动力学方程描述的多自主体系统、通信中存在时延、量化以及异步趋同控制问题, 尚需进一步的研究工作.

## 参 考 文 献

- [1] Ren W, Beard R, and Atkins E. A survey of consensus problems in multi-agent coordination. Proc. of the 2005 American Control Conference, 2005.
- [2] Olfati-Saber R, Fax J A, and Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proc. of the IEEE*, 2007, **95**(1): 215–233.
- [3] Tsitsiklis J, Bertsekas D, and Athans M. Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1986, **31**(9): 803–812.
- [4] Jadbabaie A, Lin J, and Morse A. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2003, **48**(6): 988–1001.
- [5] Olfati-Saber R and Murray R. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1520–1533.
- [6] Huang M and Manton J. Coordination and consensus of networked agents with noisy measurements: Stochastic algorithms and asymptotic behavior. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2009, **48**(1): 134–161.
- [7] Li T, Fu M Y, Xie L H, and Zhang J F. Distributed consensus with limited communication data rate. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2011, **56**(2): 279–292.
- [8] Fagnani F and Zampieri S. Average consensus with packet drop communication. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2009, **48**(1): 102–133.
- [9] Ren W and Beard R. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2005, **50**(5): 655–661.
- [10] Li T and Zhang J F. Consensus conditions of multi-agent systems with time-varying topologies and stochastic communication noises. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2010, **55**(9): 2043–2057.
- [11] Wang B C and Zhang J F. Consensus conditions of multi-agent systems with unbalanced topology and stochastic disturbances. *Journal of Systems Science & Complexity*, 2009, **29**(10): 1353–1365.
- [12] Huang M, Dey S, Nair G, and Manton J. Stochastic consensus over noisy networks with Markovian and arbitrary switches. *Automatica*, 2010, **46**(10): 1571–1583.
- [13] Li T and Zhang J F. Mean square average-consensus under measurement noises and fixed topologies: Necessary and sufficient conditions. *Automatica*, 2009, **45**(8): 1929–1936.
- [14] Matei I and Baras J. Convergence results for the linear consensus problem under Markovian random graphs, 2009.
- [15] Brewer J. Kronecker products and matrix calculus in system theory. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 1978, **25**(9): 772–781.
- [16] Karlin S and Taylor H. A Second Course in Stochastic Processes. New York: Academic Press, 1981.

- [17] Skorokhod A. Asymptotic Methods in The Theory of Stochastic Differential Equations. American Mathematical Society, 1989.
- [18] Fragoso M and Costa O. A unified approach for stochastic and mean square stability of continuous-time linear systems with Markovian jumping parameters and additive disturbances. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2005, **44**(4): 1165–1191.
- [19] Friedman A. Stochastic Differential Equations and Applications. New York: Academic Press, 1976.
- [20] Godsil C and Royle G. Algebraic Graph Theory. New York: Springer, 2001.
- [21] Michel A and Miller R. Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems. New York: Academic Press, 1977.
- [22] Liptser R and Shiryaev A. Statistics of Random Processes: General Theory. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [23] Chow Y and Teicher H. Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales. New York: Springer-Verlag, 1978.

## DISTRIBUTED CONSENSUS OF CONTINUOUS-TIME MULTI-AGENT SYSTEMS WITH MARKOVIAN SWITCHING TOPOLOGIES AND STOCHASTIC COMMUNICATION NOISES

ZHANG Qiang    ZHANG Jifeng

(*Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190*)

**Abstract** Distributed consensus of continuous-time multi-agent systems (MASs) in uncertain communication environments is investigated. The communication channel between each pair of adjacent agents is subjected to Gaussian disturbances. The random switches between different communication topologies are described by Markov processes. We design a distributed consensus protocol to attenuate the communication noises and Markov topology switches. Under mild conditions, both the asymptotic unbiased mean square average-consensus and asymptotic unbiased almost sure average-consensus are established by use of Markovian switching stochastic differential equation theory, algebraic graph theory, continuous martingale theory and Markov chain theory. The effect of agent-dependent gain functions on the consensus of MASs is also analyzed.

**Key words** Multi-agent systems, consensus, communication noise, Markov chain.