

# 非平衡拓扑和随机干扰情形下 多自主体系统的趋同条件<sup>\*</sup>

王炳昌 张纪峰

(中国科学院数学与系统科学研究院系统控制重点实验室, 北京 100190)

**摘要** 研究了具有一般有向通信拓扑和高斯通信噪声的多自主体系统的趋同条件. 这里所研究的有向拓扑不仅包含有向平衡图, 而且包含非平衡图, 后者是本文的重点. 我们利用马氏链的结果得到了一个网络节点的互通类; 通过对噪声影响的细化, 给出了不同噪声情形下系统趋同条件: (1) 对互通类的自主体获取信息受到噪声干扰情形, 给出了系统均方趋同的充要条件, 并证明该条件也保证以概率 1 趋同; (2) 对互通类的自主体获取信息未受到噪声干扰但其余自主体获取信息受到干扰情形, 给出了系统均方趋同的充分条件, 并证明该条件在一定意义下也是必要的; (3) 对整个系统无噪声情形, 给出了系统趋同的充要条件.

**关键词** 多自主体系统, 趋同控制, 通信噪声, 非平衡图.

MR(2000) 主题分类号 90B15, 68M14

## 1 引言

近年来, 趋同问题成为多自主体领域的一个热点问题<sup>[1,2]</sup>. 对于趋同问题, 无论网络通信拓扑是无向图还是有向平衡图, 有通信噪声还是无通信噪声, 都有不少深刻的结果<sup>[3-7]</sup>. 文 [6] 研究了网络拓扑为有向平衡图时连续时间多自主体系统的趋同控制, 分别对系统有通信噪声和无通信噪声情形, 给出了均方趋同的充要条件. 但现实世界中, 非平衡图网络广泛存在着. 对于一般具有向拓扑 (大多是非平衡图) 网络, 当实现趋同时, 虽然各状态均收敛到一个与初值有关的变量, 但它不一定是各状态初值的平均. 这类趋同不仅在理论上更具有一般性, 而且也有更广泛的实际意义<sup>[8,9]</sup>. 文 [10] 运用随机矩阵的方法给出了线性定常协议下系统趋同的充要条件. 文 [11] 研究了带鞅差通信噪声的多自主体系统, 给出了均方趋同和以概率 1 趋同的充分条件. 对于一般具有向拓扑且带噪声的系统, 如何得到趋同的充要条件是一个比有向平衡图的情形更加复杂、更加困难的问题. 这不仅是因为在一般噪声条件下, 很难得到一个趋同的充要条件, 而且由于拓扑网络的非平衡性, 文 [6] 采用的对称化图的方法此时不再适用.

---

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金项目 (60934006) 和中国科学院知识创新工程重要方向项目 (KJCX3-SYW-S01) 资助课题.

收稿日期: 2009-09-11.

针对此问题, 本文利用文 [11] 的结果把网络拓扑和马氏链对应起来, 对网络节点进行了分类, 提出了起关键作用的“互通类”. 同时, 将噪声的影响也进行了细化, 分成了三种情形: i) 互通类中的自主体获取信息受到噪声干扰; ii) 互通类中的自主体获取信息未受到噪声干扰但其余自主体获取信息受到干扰; iii) 整个系统无通信噪声. 对情形 i), 我们运用随机分析理论给出了系统均方趋同的充要条件, 并证明该条件也保证以概率 1 趋同. 由于在一个平衡图中, 网络互通类包含网络的所有节点, 因此, 本文将文 [6] 中的结果进行了实质性推广, 从平衡拓扑网络推广到了一般拓扑网络. 对情形 ii), 我们给出了网络均方趋同的充分条件, 并证明了这个条件在一定意义下的必要性. 该条件是已有工作中没有给出的. 对情形 iii), 尽管文 [10] 给出了一些趋同的充要条件, 但这里我们给出了更多选取增益权值的自由.

本文其余部分的组织如下. 第 2 节, 我们引入图论的基本概念, 并描述了本文要研究的问题. 第 3 节, 我们首先引入两个辅助引理, 然后分别对三类噪声条件下, 给出系统趋同的条件. 第 4 节给出了算法的仿真模拟. 第 5 节对论文进行了简单总结.

本文将用到如下记号.  $\mathbf{1}_N$  表示所有分量都为 1 的  $N$  维列向量,  $I$  表示单位矩阵. 给定矩阵  $A$ ,  $A^T$  表示  $A$  的转置,  $\text{tr}(A)$  表示  $A$  的迹. 给定向量  $X$ ,  $\|X\|$  表示  $X$  的 2 范数. 对一个随机变量  $\xi$  和  $\sigma$ -代数  $\mathcal{F}$ ,  $\xi \in \mathcal{F}$  表示  $\xi$  关于  $\mathcal{F}$  可测,  $\xi^- \triangleq -\min\{\xi, 0\}$ . 对一族随机变量  $\{\xi_\lambda, \lambda \in A\}$ ,  $\sigma\{\xi_\lambda, \lambda \in A\}$  表示  $\sigma$ -代数  $\sigma\{\xi_\lambda \in B\}$ ,  $B \in \mathcal{B}$ ,  $\lambda \in A$ , 其中  $\mathcal{B}$  表示一维 Borel  $\sigma$ -代数.

## 2 问题描述

### 2.1 图论的基本概念

为了后面描述方便, 我们引入如下术语<sup>[1,2,4]</sup>. 加权有向图  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}_{\mathcal{G}}, \mathcal{A}_{\mathcal{G}}\}$  是一个三元组, 其中  $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$  是节点集, 节点  $i$  代表第  $i$  个自主体,  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  是边集,  $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$  是  $\mathcal{G}$  的加权邻接矩阵.  $\mathcal{G}$  中的边用有序数组  $(j, i)$  表示, 边  $(j, i)$  表示从自主体  $j$  到自主体  $i$  的通信信道. 第  $i$  个自主体的邻居节点集合记作  $N_i = \{j \in \mathcal{V} | (j, i) \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}}\}$ . 对任意的  $j, i \in \mathcal{V}$ ,  $a_{ij} \geq 0$  且  $a_{ij} > 0$  当且仅当  $j \in N_i$ .  $N_i$  中元素称为  $i$  的邻居节点. 如果一个节点没有邻居节点, 但它是  $\mathcal{V}$  中另一个节点的邻居节点, 那么我们称这个节点为源节点. 如果一个节点既没有邻居节点, 又不是  $\mathcal{V}$  中其他节点的邻居节点, 那么我们称这个节点为孤立点.

一系列边  $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k)$  称为节点  $i_1$  到  $i_n$  的一条有向路径. 如果对任意的  $i, j \in \mathcal{V}$ , 存在从  $i$  到  $j$  的路径, 那么称  $\mathcal{G}$  为强连通的. 有向树是这样一类有向图, 它有且仅有一个源节点, 其余节点有且仅有一个邻居节点.  $\mathcal{G}$  的生成树是一个节点集是  $\mathcal{V}$ , 边集是  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  子集的有向树. 一个强连通的有向图一定包含一棵生成树.

### 2.2 分布式协议和趋同控制

本文考虑一般有向拓扑和随机干扰情形下连续时间一阶积分型多自主体网络的趋同控制. 第  $i$  个自主体的动力学模型为

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

其中  $x_i(t) \in \mathbf{R}$  是第  $i$  个自主体的状态,  $u_i(t) \in \mathbf{R}$  是第  $i$  个自主体的控制输入. 记  $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T$ .

第  $i$  个自主体可以收到其邻居自主体的信息为

$$y_{ji}(t) = x_j(t) + \sigma_{ji}\omega_{ji}(t), \quad j \in N_i, \quad (2)$$

其中  $y_{ji}(t)$  可看作第  $i$  个自主体对第  $j$  个自主体的状态  $x_j(t)$  所作的量测,  $\{\omega_{ji}(t), i, j = 1, 2, \dots, N\}$  是相互独立的标准白噪声,  $\sigma_{ji} \geq 0$  是噪声强度.

如果  $u_i(t) \in \sigma\{x_i(s), y_{ji}(s), j \in N_i, 0 \leq s \leq t\}, \forall t \geq 0, i = 1, 2, \dots, N$ , 那么我们称所有自主体控制输入  $\{u_i, i = 1, 2, \dots, N\}$  构成一个基于量测信息的分布式协议<sup>[6]</sup>.

应用分布式协议到系统 (1)–(2), 一般来说, 我们可得到一个随机闭环系统. 所谓的趋同控制问题就是寻求适当的分布式协议, 使得闭环系统中不同个体的状态随时间的推移趋于一致. 下面我们具体给出本文要研究的两类趋同的定义.

**定义 1**<sup>[5]</sup> (均方趋同) 如果  $E|x_i(t)|^2 < \infty$ , 且存在  $x^*$ , 使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} E|x_i(t) - x^*|^2 = 0, i = 1, 2, \dots, N$ , 则我们称自主体系统或  $X(t)$  达到均方趋同.

**定义 2**<sup>[5]</sup> (以概率 1 趋同) 如果存在  $x^*$ , 使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = x^*, \text{ a.s.}, i = 1, 2, \dots, N$ , 则我们称  $X(t)$  达到以概率 1 趋同.

### 3 收敛性分析

类似于文 [5,6], 我们采用如下的分布式协议

$$u_i(t) = \begin{cases} 0, & N_i = \emptyset, \\ a(t) \sum_{j \in N_i} a_{ij}(y_{ji}(t) - x_i(t)), & N_i \neq \emptyset, \end{cases} \quad (3)$$

其中  $a(t)$  是一个逐段连续的非负函数, 称为趋同增益函数.

令  $L = (l_{ij}), l_{ij} = a_{ij}, i \neq j, l_{ii} = -\sum_{j \in N_i} a_{ij}, H_i = (a_{i1}\sigma_{1i}, a_{i2}\sigma_{2i}, \dots, a_{iN}\sigma_{Ni})$ , 其中  $\sigma_{ji} = 0, j \notin N_i, H = \text{diag}(H_1, H_2, \dots, H_N)$ . 应用分布式协议 (3) 到系统 (1)–(2) 得

$$\dot{X}(t) = a(t)LX(t) + a(t)H\eta(t),$$

其中  $\omega_i(t) = [\omega_{1i}(t), \omega_{2i}(t), \dots, \omega_{Ni}(t)]^T, \eta(t) = [\omega_1^T(t), \omega_2^T(t), \dots, \omega_N^T(t)]^T$ . 这是一个由  $N^2$  维白噪声驱动的系统, 它等价于下面的 Itô 随机微分方程<sup>[12,13]</sup>

$$dX(t) = a(t)LX(t)dt + a(t)GdW(t), \quad (4)$$

其中

$$G = \text{diag}\left(\sqrt{\sum_{j \in N_1} (a_{1j}\sigma_{j1})^2}, \dots, \sqrt{\sum_{j \in N_N} (a_{Nj}\sigma_{jN})^2}\right),$$

$W(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_N(t))^T$  是  $N$  维标准 Brownian 运动.

注意到  $L$  是行和为零、非对角线元素非负的矩阵, 类似于文 [11], 我们可以把  $L$  看作状态空间为  $\{1, 2, \dots, N\}$  的某连续时间马氏链 (不妨记为  $\{Y_t\}$ ) 的无穷小生成元. 根据标准马氏链的结果<sup>[14]</sup>, 我们可得:  $G$  含有一颗生成树当且仅当  $\{Y_t\}$  仅有一个互通等价类  $C = (l_1, l_2, \dots, l_d)$ , 其他状态都是瞬时态. 下面我们引用文 [11] 的结果作为我们的引理.

**引理 1**<sup>[11]</sup> 设  $\mathcal{G}$  含有一棵生成树, 则

- i)  $\{Y_t\}$  存在唯一的概率测度  $\pi$  使得  $\pi L = 0$ . 另外,  $\pi_i > 0$  当且仅当  $i \in \mathbf{C}$ ;  
 ii) 存在非奇异矩阵  $\Phi = (\mathbf{1}_N, \tilde{\Phi})$  且  $\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \pi \\ \tilde{\Psi} \end{pmatrix}$  使得

$$\Phi^{-1}L\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{L} \end{pmatrix},$$

其中  $\tilde{L}$  稳定, 即  $\tilde{L}$  的所有特征值均有负实部.

令  $Z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_N(t))^T = \Phi^{-1}X(t)$ ,  $\tilde{Z}(t) = (z_2(t), z_3(t), \dots, z_N(t))^T$ , 我们有

$$dz_1(t) = a(t)\alpha dW(t), \quad (5)$$

$$d\tilde{Z}(t) = a(t)\tilde{L}\tilde{Z}(t)dt + a(t)\tilde{G}dW(t), \quad (6)$$

其中  $\Phi^{-1}G = \begin{pmatrix} \alpha \\ \tilde{G} \end{pmatrix}$ ,  $\alpha$  是  $\Phi^{-1}G$  的第一行. 类似于 [11] 的引理 5, 我们有

**引理 2** 设  $\mathcal{G}$  含有一颗生成树,  $X(t)$  达到均方 (以概率 1) 趋同, 当且仅当存在  $z_1^\infty$ , 使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} E|z_1(t) - z_1^\infty|^2 = 0$  ( $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) \rightarrow z_1^\infty$ , a.s.), 并且  $\lim_{t \rightarrow \infty} E\|\tilde{Z}(t)\|^2 = 0$  ( $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{Z}(t) = 0$ , a.s.). 此时,  $\lim_{t \rightarrow \infty} E\|X(t) - z_1^\infty \mathbf{1}_N\|^2 = 0$  ( $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = z_1^\infty \mathbf{1}_N$ , a.s.).

首先, 对系统初值作假设  $E|X(0)|^2 < \infty$ . 然后, 我们给出如下 4 个假设:

A1)  $\mathcal{G}$  含有一棵生成树;

A2)  $\int_0^\infty a(s)ds = \infty$ ;

A3)  $\int_0^\infty a^2(s)ds < \infty$ ;

A4)  $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$ .

由 (5) 得

$$z_1(t) = z_1(0) + \int_0^t a(s)\alpha dW(s).$$

$\{z_1(t), \mathcal{F}_t\}$  是一个鞅, 其中  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_i(s), s \leq t, i = 1, 2, \dots, N)$ , A3) 保证了  $\int_0^\infty a(s)\alpha dW(s)$  是适定的.

**定理 1** 应用协议 (3) 到系统 (1)-(2), 若 A1)-A3) 成立, 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} E\|X(t) - x^* \mathbf{1}_N\|^2 = 0$ , 其中  $x^* = \pi X(0) + \int_0^\infty a(s)\alpha dW(s)$ .

证 由 (5) 和 A3) 得

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} E|z_1(t)|^2 &= \sup_{t \geq 0} E \left| \int_0^t a(s)\alpha dW(s) + z_1(0) \right|^2 \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^N \pi_i \sqrt{\sum_{j \in N_i} (a_{ij}\sigma_{ji})^2} \int_0^\infty a^2(s)ds + c_1 E|X(0)|^2 < \infty, \end{aligned}$$

其中  $c_1 > 0$  是常数. 由于  $\{z_1(t), \mathcal{F}_t\}$  是一个鞅, 所以  $\lim_{t \rightarrow \infty} E|z_1(t) - z_1^\infty|^2 = 0$  且  $z_1(t) \rightarrow z_1^\infty$ , a.s., 其中  $z_1^\infty = \pi x(0) + \int_0^\infty a(s)\alpha dW(s)$ .

现在我们证明  $\lim_{t \rightarrow \infty} E\|\tilde{Z}(t)\|^2 = 0$ . 由于  $\tilde{L}$  稳定, 故存在  $Q > 0$ , 使得  $Q\tilde{L} + \tilde{L}^T Q = -I$ . 令  $V(t) = \tilde{Z}(t)^T Q \tilde{Z}(t)$ , 则

$$\begin{aligned} dV(t) &= -a(t)\tilde{Z}(t)^T \tilde{Z}(t)dt + 2a(t)\tilde{Z}(t)^T Q \tilde{G}dW(t) + a^2(t)\text{tr}(Q\tilde{G}\tilde{G}^T)dt \\ &\leq -\frac{1}{\lambda_N}a(t)V(t)dt + 2a(t)\tilde{Z}(t)^T Q \tilde{G}dW(t) + a^2(t)\text{tr}(Q\tilde{G}\tilde{G}^T)dt, \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\lambda_N$  是  $Q$  的最大特征值. 根据 [15] 中的第 42 页或 [16], 任意给定  $T > 0$ , 存在  $K_T > 0$ ,

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} \|\tilde{Z}(s)\|^2 \leq K_T(1 + E\|\tilde{Z}(0)\|^2) < \infty.$$

故

$$E \int_0^t a^2(s)\|\tilde{Z}(s)\|^2 ds < \infty.$$

从而

$$E \int_0^t a(s)\tilde{Z}^T(s)Q\tilde{G}dW(s) = 0.$$

对 (7) 式两边先对  $t$  积分, 然后取期望得

$$EV(t) \leq -\frac{1}{\lambda_N} \int_0^t a(s)EV(s)ds + c_2,$$

其中  $c_2 = \int_0^\infty a^2(s)\text{tr}(Q\tilde{G}\tilde{G}^T)dt < \infty$ . 由 Gronwall-Bellman 不等式 [17] 得,

$$EV(t) \leq c_2 \exp\left(-\frac{1}{\lambda_N} \int_0^t a(s)ds\right) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

故  $\lim_{t \rightarrow \infty} E\|\tilde{Z}(t)\|^2 = 0$ . 令  $x^* = z_1^\infty$ , 由引理 2, 我们可得定理的结论.

**定理 2** 若 A1)–A3) 成立, 则  $X(t)$  以概率 1 趋同.

证 根据引理 2, 我们只需要证明  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = z_1^\infty$ , a.s. 和  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{Z}(t) = 0$ , a.s. 由于  $z_1(t) \rightarrow z_1^\infty$ , a.s. 已在定理 1 的证明中给出, 下面我们只证明  $\tilde{Z}(t) \rightarrow 0$ , a.s. 根据定理 1 证明中的 (7) 式, 我们有

$$V(t) = V(0) - \int_0^t a(s)\tilde{Z}^T(s)\tilde{Z}(s)ds + 2 \int_0^t a(s)\tilde{Z}(s)^T Q \tilde{G}dW(s) + \int_0^t a^2(s)\text{tr}(Q\tilde{G}\tilde{G}^T)ds.$$

令  $\tilde{V}(t) = V(t) - \int_0^t a^2(s)\text{tr}(Q\tilde{G}\tilde{G}^T)ds$ , 则  $\tilde{V}(t)$  是上鞅. 事实上, 对任意的  $s \leq t$ ,

$$E(\tilde{V}(t) - \tilde{V}(s)|\mathcal{F}_s) = E\left[-\int_s^t a(r)\tilde{Z}^T(r)\tilde{Z}(r)dr + \int_s^t a(r)\tilde{Z}^T(r)Q\tilde{G}dW(r)|\mathcal{F}_s\right] \leq 0.$$

由  $V(t) \geq 0$  得  $\tilde{V}(s) \geq -\int_0^\infty a^2(s)\text{tr}(Q\tilde{G}\tilde{G}^T)ds$ . 从而

$$\sup_{t \geq 0} E\tilde{V}(t)^- \leq \int_0^\infty a^2(s)\text{tr}(Q\text{tr}(Q\tilde{G}\tilde{G}^T))ds < \infty,$$

进一步

$$\sup_{t \geq 0} E|\tilde{V}(t)| \leq \sup_{t \geq 0} [2E\tilde{V}(t)^- + E\tilde{V}(t)] \leq 2 \int_0^\infty a^2(s) \text{tr}(Q\tilde{G}^T\tilde{G}) ds + E\tilde{V}(0) < \infty.$$

因此,由上鞅收敛定理<sup>[13]</sup>知,存在 $\tilde{V}^*$ 有 $\tilde{V}(t) \rightarrow \tilde{V}^*$ , a.s.,从而 $V(t) \rightarrow \tilde{V}^* + \int_0^\infty a^2(s) \text{tr}(Q\tilde{G}\tilde{G}^T)$ , a.s. 另一方面,由 $E|V(t)| \rightarrow 0$ 可得 $V(t) \xrightarrow{P} 0$ (以概率收敛),故 $V(t) \rightarrow 0$ , a.s.,从而 $\tilde{Z}(t) \rightarrow 0$ , a.s.

注 1 对于离散时间模型情形,由于各自主体的状态按一定的递推规律演化,可综合出一个称之为 Kushner-Clark 的条件,验证该条件是证明系统以概率 1 趋同的关键<sup>[11]</sup>.但连续时间情形,很难综合出一个类似的关键性的条件,我们构造了一个与随机 Lyapunov 函数有关的上鞅,并利用定理 3 和上鞅收敛定理证明了系统以概率 1 趋同.

通过定理 1,我们知道假设 A1)–A3) 是系统达到均方趋同和以概率 1 趋同的充分条件.而下面的定理 3 告诉我们,在一定的噪声条件下, A1)–A3) 也是保证均方趋同的必要条件.

**定理 3** 假设至少存在  $i \in \mathcal{C}, j \in \mathcal{V}$ , 使得  $\sigma_{ji} > 0$  应用协议 (3) 到系统 (1)–(2), 则  $X(t)$  达到均方趋同当且仅当 A1)–A3) 成立.

证 充分性的证明我们已在定理 1 的证明中给出. 下面我们分两步证明必要性.

第 1 步 我们证明 A1) 是必要的. 假设  $\mathcal{G}$  不含有生成树, 则只可能有 3 种情况<sup>[10]</sup>. 我们只需证明对任何一种情况,  $X(t)$  都不可能达到均方趋同.

(I)  $\mathcal{G}$  至少含有一个孤立点, 不妨记为  $i_0$ . 应用协议 (5) 我们得到如下的闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}_{i_0}(t) = 0, \\ d\hat{X}(t) = a(t)\hat{L}\hat{X}(t)dt + a(t)\hat{G}(t)dW(t), \end{cases}$$

其中  $\hat{X}(t) = [x_1(0), \dots, x_{i_0-1}(t), x_{i_0+1}(t), \dots, x_{i_N}(t)]^T$ ,  $\hat{L}, \hat{G}$  是对  $\hat{X}(t)$  进行本节前面的推导得到对应于  $L, G$  的矩阵. 假设  $\hat{X}(t)$  在某初始条件下可达到均方趋同(若不然,  $X(t)$  不可能达到均方趋同), 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{X}(t) = \hat{x}^* \mathbf{1}_{N-1}$ . 因此, 若取  $x_{i_0}(0) \neq \hat{x}^*$ , 则  $X(t)$  不能达到均方趋同.

(II)  $\mathcal{G}$  不含孤立点, 但至少含有两个源节点, 不妨设  $i_1, i_2$ . 取  $x_{i_1}(0) = 0, x_{i_2}(0) = 1$ , 注意到源节点没有邻居节点, 应用协议 (3), 我们可得  $x_{i_1}(t) \equiv 0 \neq 1 \equiv x_{i_2}(t)$ . 因此, 此时  $X(t)$  不能达到均方趋同.

(III)  $\mathcal{G}$  没有孤立点也没有两个或两个以上的源节点, 但  $\mathcal{G}$  可以划分为两个不相交的子图  $\mathcal{G}_1$  和  $\mathcal{G}_2$ . 设  $\mathcal{G}_1$  和  $\mathcal{G}_2$  各含有一颗自身的生成树. 若不然, 至少存在含有生成树的  $\mathcal{G}'_1, \mathcal{G}'_2$ , 它们不相交, 并且它们与其余的子图也不相交. 应用协议 (3), 我们有

$$dX_1(t) = a(t)L_1X_1(t)dt + a(t)G_1dW(t),$$

$$dX_2(t) = a(t)L_2X_2(t)dt + a(t)G_2dW(t),$$

其中  $X_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) 是  $\mathcal{G}'_i$  的状态变量,  $L_i, G_i$  以及后面的  $\pi^i, \alpha_i$  均为对  $X_i(t)$  进行本节前面的推导得到的相应的矩阵或向量. 由引理 2 和定理 1 得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\|X_1(t) - x_1^* \mathbf{1}_{N_1}\|^2 = 0, \quad x_1^* = \pi^1 X_1(0) + \int_0^\infty a(s)\alpha_1 dW(s),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\|X_2(t) - x_2^* \mathbf{1}_{N_2}\|^2 = 0, \quad x_2^* = \pi^2 X_2(0) + \int_0^\infty a(s)\alpha_2 dW(s).$$

由于  $\pi^i \neq 0$  ( $i = 1, 2$ ), 我们可选取适当的  $X_i(0)$  使  $x_1^* \neq x_2^*$ . 此时,  $X(t)$  不能达到均方趋同.

第 2 步 我们证明 A2) 和 A3) 的必要性. 注意到  $\tilde{Z}(t)^T Q \tilde{Z}(t) \geq \lambda_1 \tilde{Z}(t)^T \tilde{Z}(t)$  ( $\lambda_1$  是  $Q$  的最小特征值). 类似于定理 1 证明中的 (7) 式, 我们有

$$\begin{aligned} EV(t) - EV(0) &\geq -\frac{1}{\lambda_1} \int_0^t a(s) EV(s) ds + \int_0^t a^2(s) \text{tr}(Q \tilde{G}^T \tilde{G}) ds \\ &\geq -\frac{1}{\lambda_1} \int_0^t a(s) EV(s) ds. \end{aligned}$$

由 Gronwall-Bellman 不等式<sup>[17]</sup> 得

$$EV(t) \geq EV(0) \exp\left(-\frac{1}{\lambda_1} \int_0^t a(s) ds\right), \quad (8)$$

再由  $EV(t) \rightarrow 0$  和  $\lambda_1 > 0$  得  $\int_0^\infty a(s) ds = \infty$ . 下面我们证明 A3) 的必要性. 根据引理 2, 我们有

$$\infty > \lim_{t \rightarrow \infty} E(z_1(t))^2 = E(z_1^\infty)^2 = E\left(\pi x(0) + \int_0^\infty a(s) \alpha dW(s)\right)^2.$$

因此,

$$E\left(\int_0^\infty a(s) \alpha dW(s)\right)^2 \leq 2\left[E(-\pi x(0))^2 + E\left(\pi x(0) + \int_0^\infty a(s) \alpha dW(s)\right)^2\right] < \infty.$$

另一方面,

$$E\left(\int_0^\infty a(s) \alpha dW(s)\right)^2 = \alpha^T \alpha \int_0^\infty a^2(s) ds = \sum_i \pi_i^2 \sum_{j \in N_i} (a_{ij} \sigma_{ji})^2 \int_0^\infty a^2(s) ds.$$

由于存在  $i \in C$ ,  $\sigma_{ji} > 0$ , 根据引理 1, 我们有  $\sum_i \pi_i^2 \sum_{j \in N_i} (a_{ij} \sigma_{ji})^2 > 0$ , 故  $\int_0^\infty a^2(s) ds < \infty$ .

注 2 根据前面的讨论, 我们知道  $C$  是马氏链  $\{Y_t\}$  的唯一互通类. 根据  $\{Y_t\}$  的无穷小生成元  $L$  和  $\mathcal{G}$  的邻接矩阵  $\mathcal{A}$  的对应关系,  $C$  在一定意义上也是多自主体系统中从邻居节点获取信息较少的一类. 具体地说,  $C$  中的自主体一定不能收到  $C$  外自主体的信息, 而  $C$  之外的自主体一定可以收到  $C$  中某些自主体的信息. 特别地, 在 Leader-Follower 模型中,  $C$  仅包含一个自主体, 即 Leader. 定理 2 是说, 当  $C$  中自主体获取的信息受到噪声污染时, 为保证  $X(t)$  均方趋同, 条件 A1-A3) 是必要的. 当  $L$  的列和也为零 (即  $\mathcal{G}$  为平衡图) 时,  $C = \{1, 2, \dots, N\}$ , 定理 2 就变成了文 [6] 的定理 3.4. 因此, 定理 2 是 [6] 的定理 3.4 的推广.

注 3 若存在  $i \notin C$ ,  $j \in \mathcal{V}$ , 使得  $\sigma_{ij} > 0$ , 但任意  $i \in C$ ,  $j \in \mathcal{V}$ , 都有  $\sigma_{ij} = 0$ , 则为了保证均方趋同, A1) 和 A2) 是必要的, 而 A3) 不必要成立.

定理 4 假设任意  $i \in C$ ,  $j \in \mathcal{V}$ , 都有  $\sigma_{ij} = 0$ , A1), A2) 和 A4) 成立, 应用协议 (3) 到系统 (1)-(2), 则  $X(t)$  可实现均方趋同.

证 由于任意  $\sigma_{ij} = 0, i \in C, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ , 我们有

$$\alpha = \left(\pi_1 \sqrt{\sum_j (a_{1j} \sigma_{j1})^2}, \dots, \pi_N \sqrt{\sum_j (a_{Nj} \sigma_{jN})^2}\right) = 0.$$

由 (5) 得  $z_1(t) \equiv z_1(0)$ .

下面我们证明  $E\|\tilde{Z}(t)\|^2 \rightarrow 0$ . 由 (7) 得

$$EV(t) \leq -\frac{1}{\lambda_N} \int_0^t a(s)EV(s)ds + \int_0^t a^2(s)\text{tr}(Q\tilde{G}\tilde{G}^T)ds.$$

再由 Gronwall-Bellman 不等式<sup>[17]</sup> 得

$$\begin{aligned} EV(t) &= EV(0) \exp\left[-\frac{1}{\lambda_N} \int_0^t a(s)ds\right] + \text{tr}(Q\tilde{G}\tilde{G}^T) \int_0^t \exp\left[-\frac{1}{\lambda_N} \int_s^t a(u)du\right] a^2(s)ds \\ &\triangleq I_1(t) + I_2(t). \end{aligned}$$

显然,  $I_1(t) \rightarrow 0$ . 我们现在证明  $I_2(t) \rightarrow 0$ . 注意到

$$d\left[\exp\left(-\frac{1}{\lambda_N} \int_s^t a(u)du\right)\right] = \frac{1}{\lambda_N} \exp\left(-\frac{1}{\lambda_N} \int_s^t a(u)du\right) a(s)ds.$$

由  $a(t) \rightarrow 0$  知, 存在  $c_3 > 0$  使得对所有的  $t \geq 0$ , 有  $a(t) < c_3$ , 并且任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $t_0 > 0$ , 使得对所有的  $t \geq t_0$ , 有  $a(t) < \varepsilon$ . 因此,

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \left(\int_0^{t_0} + \int_{t_0}^t\right) \text{tr}(Q\tilde{G}\tilde{G}^T) \exp\left[-\frac{1}{\lambda_N} \int_s^t a(u)du\right] a^2(s)ds \\ &\leq c_4 \int_0^{t_0} d \exp\left[-\frac{1}{\lambda_N} \int_s^t a(u)du\right] + \lambda_N \varepsilon \int_{t_0}^t d \exp\left[-\frac{1}{\lambda_N} \int_s^t a(u)du\right] \\ &= c_4 \left\{ \exp\left[-\frac{1}{\lambda_N} \int_{t_0}^t a(u)du\right] - \exp\left[-\frac{1}{\lambda_N} \int_0^t a(u)du\right] \right\} \\ &\quad + \lambda_N \varepsilon \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{1}{\lambda_N} \int_{t_0}^t a(u)du\right] \right\}, \end{aligned}$$

其中  $c_4 = c_3 \lambda_N \text{tr}(Q\tilde{G}\tilde{G}^T)$ . 由  $\lambda_N > 0$  得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left[-\frac{1}{\lambda_N} \int_{t_0}^t a(u)du\right] = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left[-\frac{1}{\lambda_N} \int_0^t a(u)du\right] = 0.$$

因此, 由  $\varepsilon$  的任意性, 我们得  $I_2(t) \rightarrow 0$ . 类似于定理 1 的证明, 可得  $E\|\tilde{Z}(t)\|^2 \rightarrow 0$ . 再由引理 2 得,  $X(t)$  可实现均方趋同.

注 4 通过定理 3 和定理 4 我们知道, 当  $C$  中自主体获取信息受到污染时, 为保证均方趋同, A3) 是不可减弱的. 但是, 当  $C$  中自主体获取信息未受到噪声污染时, 我们可以选取一个衰减更慢的趋同增益, 例如取  $a(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ , 以保证均方趋同. 同时, 下面的定理 6 告诉我们, 定理 3 的条件在某些情形下也是保证趋同的必要条件. 另外, 如果网络中无通信噪声, 则由下面的定理 4 知, 假设 A1) 和 A2) 是保证趋同的充要条件.

**定理 5** 假设  $\sigma_{ij} = 0, \forall (j, i) \in \mathcal{E}$ , 应用协议 (3) 到系统 (1)-(2), 则存在  $x^*$ , 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - x^* \mathbf{1}_N\| = 0$$

当且仅当 A1) 和 A2) 成立.



证 充分性. 根据引理 2, 我们只需证明  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = z_1^\infty$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{Z}(t) = 0$ . 由定理假设得, (5) 中的  $\alpha = 0$  且 (6) 中的  $\tilde{G} = 0$ . 所以  $z_1(t) \equiv z_1(0)$ . 如定理 1 那样定义  $V(t)$ , 类似于 (7) 得

$$dV(t) \leq -\frac{1}{\lambda_N} a(t)V(t)dt.$$

由比较原理得

$$V(t) \leq V(0) \exp\left(-\frac{1}{\lambda_N} \int_0^t a(s)ds\right) \rightarrow 0.$$

故  $V(t) \rightarrow 0$ , 从而  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{Z}(t) = 0$ .

必要性. 对于 A1), 我们仍可以类似于定理 3 的证明对网络拓扑分 3 种情况进行讨论, 用反证法证明 A1) 的必要性, 在此不作详细讨论. 至于 A2), 类似于 (8) 得

$$V(t) \geq V(0) \exp\left(-\frac{1}{\lambda_1} \int_0^t a(s)ds\right),$$

由  $V(t) \rightarrow 0$  和  $\lambda_1 > 0$  可得  $\int_0^\infty a(s)ds = \infty$ .

**定理 6** 假设  $\sigma_{ij} = 0, \forall i \in \mathcal{C}, j \in \mathcal{V}$ , 若存在  $i \notin \mathcal{C}, j \in \mathcal{V}$ , 使得  $\sigma_{ij} > 0$ . 应用协议 (3) 到系统 (1)-(2), 若  $X(t)$  可实现均方趋同, 则 A1) 和 A2) 成立. 进一步, 若存在  $\bar{a}, \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \bar{a}$ , 则  $\bar{a} = 0$ .

证 第 1 部分仍可以类似于定理 3 证得. 至于第 2 部分, 假设  $\bar{a} \neq 0$ , 则由广义积分的性质, 在定理 4 的证明中  $I_2(t)$  不收敛到 0, 从而  $X(t)$  不均方趋同. 这与定理假设矛盾, 故  $\bar{a} = 0$ .

#### 4 仿真算例

考虑一个由 4 个结点构成的有向图  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$  (见图 1), 其中  $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\mathcal{A} = (a_{ij})_{4 \times 4}$ ,  $a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{21} = a_{31} = a_{43} = 0.7$ . 由图 1 得,  $\mathcal{G}$  含有一棵生成树, 相应马氏链的互通类为  $\mathcal{C} = \{1, 3, 4\}$ . 设系统的初始状态为  $X(0) = [4, 3, 1, 5]^T$ , 通信噪声的强度为  $\sigma_{31} = \sigma_{41} = \sigma_{13} = 0.3$ . 此时互通类  $\mathcal{C}$  中自主体获取的信息受到通信噪声的污染.

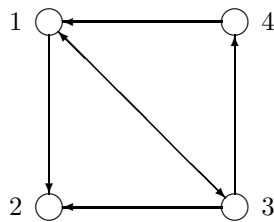


图 1 由 4 个结点构成的有向图

现在我们对应用协议 (3) 后的闭环系统进行仿真模拟. 首先, 我们选取趋同增益  $a(t) \equiv 0.25$ , 闭环系统的状态如图 2(a) 所示. 可以看出, 闭环系统是发散的. 其次, 我们选取趋同增益

$a(t) = \frac{\ln(t+1)}{t+1}$ , 此时 A1)–A3) 均成立, 图 2(b) 表明闭环系统的 4 条轨线收敛到共同的常值. 然后, 我们选取趋同增益  $a(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$ , 此时 A1) 和 A2) 成立, 但 A3) 不成立, 图 3(a) 表明闭环系统不能收敛到一个共同的常值.

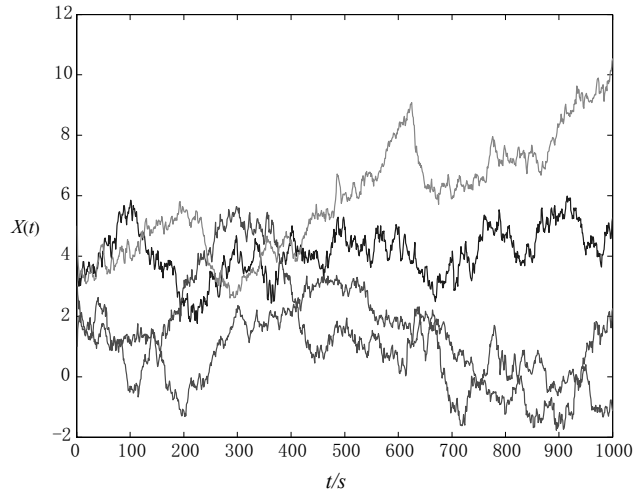


图 2 (a) 趋同增益  $a(t) \equiv 0.25$  时各自主体的状态轨线

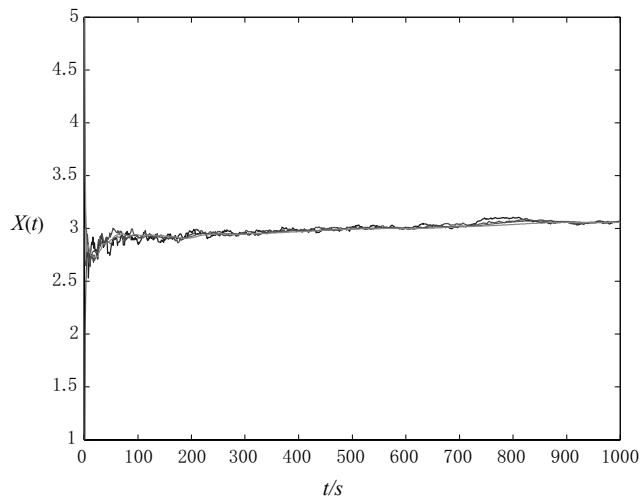
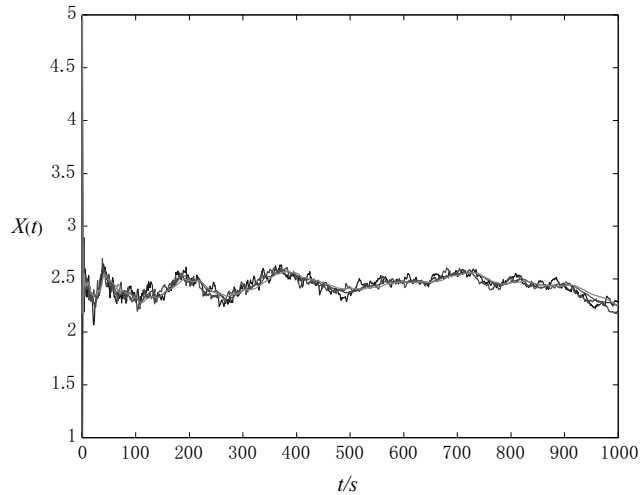
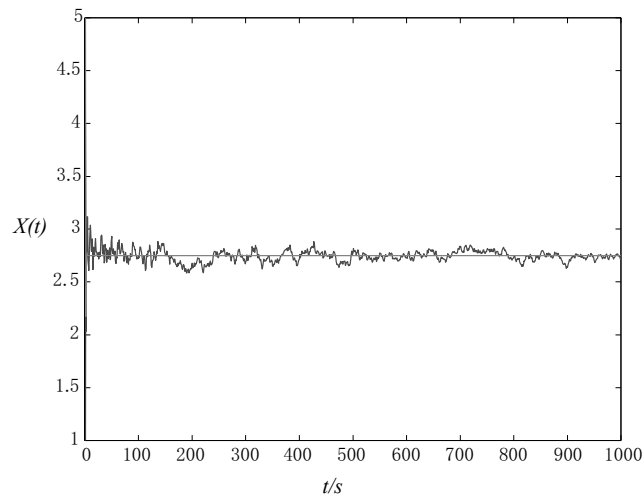


图 2 (b) 趋同增益  $a(t) = \frac{\ln(t+1)}{t+1}$  时各自主体的状态轨线

图 3(a)  $C$  中自主体受到噪声干扰时各自主体的状态轨线图 3(b)  $C$  中自主体未受到噪声干扰时各自主体的状态轨线

另一方面, 我们考虑通信噪声强度为  $\sigma_{12} = \sigma_{32} = 0.3$ . 此时,  $C$  中自主体获取的信息未受到噪声污染, 而  $C$  之外自主体获取的信息受到污染. 我们仍选取趋同增益  $a(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$ , 图 3(b) 表明闭环系统的 4 条轨线收敛到共同的常值.

## 5 结束语

本文研究了一般有向拓扑下带随机通信噪声的连续时间一阶多自主体网络的趋同控制. 这里所研究的有向拓扑不仅包含有向平衡图, 而且包含非平衡图, 后者是本文的重点. 我们

运用马氏链的结果得到了一个网络节点的互通类, 针对互通类中的自主体获取信息是否受到噪声干扰, 给出了网络实现趋同的条件. 通过数值例子, 验证了所得结论. 不过, 这里我们仅考虑了固定拓扑和一阶积分型多自主体网络的情形, 对诸如时变拓扑和一般动力系统的趋同控制和条件等更困难的问题尚待进一步研究.

### 参 考 文 献

- [1] Ren W, Beard R W and Atkins E M. A survey of consensus problems in multi-agent coordination. Proc. of the 2005 American Control Conference, Portland, 2005.
- [2] Olfati-Saber R, Fax J A and Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proc. of the IEEE*, 2007, **95**(1): 215–233.
- [3] Jadbabaie A, Lin J and Morse S M. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2003, **48**(6): 988–1001.
- [4] Olfati-Saber R and Murray R M. Consensus problem in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1520–1533.
- [5] Huang M and Manton J H. Coordination and consensus of networked agents with noisy measurement: Stochastic algorithms and asymptotic behavior. *SIAM Journal on Control and Optimization: Special Issue on Control and Optimization in Cooperative Networks*, 2009, **48**(1): 134–161.
- [6] Li T and Zhang J F. Mean square average consensus under measurement noises and fixed topologies: Necessary and sufficient conditions. *Automatica*, 2009, **45**(8): 1929–1936.
- [7] Li T and Zhang J F. Consensus conditions of multi-agent systems with time-varying topologies and stochastic communication noises. accepted by *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2008.
- [8] Liu Y and Yang Y R. Reputation propagation and agreement in mobile ad-hoc networks. Proceedings of IEEE Wireless Communications and Networking Conference, New Orleans, 2003.
- [9] Visscher P K. How self-organization evolves. *Nature*, 2003, **421**: 799–800.
- [10] Ren W and Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2005, **50**(5): 655–661.
- [11] Huang M and Manton J H. Stochastic consensus seeking with noisy and directed inter-agent communication: Fixed and randomly varying topologies. accepted by *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2009.
- [12] Ma C Q, Li T and Zhang J F. Consensus control for leader-following multi-agent systems with measurement noises. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2010, **23**(1).
- [13] Chow Y S and Teicher H. Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales. New York: Springer, 1997.
- [14] Seneta E. Nonnegative Matrices and Markov Chains. (revised printing), Springer, New York, 2006.
- [15] Yong J M and Zhou X Y. Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations. Springer, New York, 1999.
- [16] Karatzas I and Shreve S E. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [17] 郭雷, 程代展, 冯德兴. 控制理论导论 — 从基本概念到研究前沿. 北京: 科学出版社, 2005.

# CONSENSUS CONDITIONS OF MULTI-AGENT SYSTEMS WITH UNBALANCED TOPOLOGY AND STOCHASTIC DISTURBANCES

WANG Bingchang      ZHANG Jifeng

*(Key Laboratory of Systems and Control, Institute of Systems Science, Academy of Mathematics  
and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190)*

**Abstract** Consensus conditions of multi-agent systems with general directed communication topology and Gaussian communication noises are investigated. Here the topology includes not only the balanced graphs but also unbalanced graphs, and the latter is the main concern of this paper. By using the results of Markov chains, a communication class of network nodes is given. By considering the influence of the noises, the consensus conditions are provided: (1) for the case where the information received by some agents in the communication class corrupted by noises, a sufficient and necessary condition of mean square consensus is given. It is shown that this condition can also ensure almost sure consensus. (2) For the case where no information received by the agents in the communication class is corrupted, but the information received by some agents outside of the communication class is corrupted, a sufficient condition of mean square consensus is obtained, which is shown to be necessary in some sense. (3) For the case without noise, a sufficient and necessary condition of consensus is presented.

**Keywords** Multi-agent systems, consensus control, communication noise, unbalanced graphs.