



防护措施下一类高传染性多潜伏期传染病的高维动态模型

谈树萍 张纪峰

(中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100080)

摘要: 传染病给人们的生命带来了极大的威胁, 对于高传染性的疾病, 政府总会采取一些防护措施. 本文针对防护措施下的高传染性且具有潜伏期等特性的一类传染病, 结合传染病模型, 在一定假设条件下给出了这类疾病单日新收治的直接确诊病例及疑似病例的高维动态模型, 并使用最小二乘法进行了参数辨识. 最后以 SARS 为例, 利用网上公布的 SARS 数据给出了 5 月 22 日 - 5 月 31 日的预测结果并将预测结果和实际数据进行了比较, 说明了模型的有效性.

关键词: 传染病; 高维动态模型; 参数估计; 最小二乘法; 预测

中图分类号: O175.7; O212.1 **MR 分类号:** 92D25; 33E30 **文献标识码:** A

文章编号: 1001-9626(2005)04-0392-07

0 引言

虽然科技在不断发展, 但疾病总是威胁着人们的生命, 尤其是高传染性且具有潜伏期的疾病, 由于其具有潜伏期, 不仅使患者延误了最佳治疗时机, 而且使患者接触过的人在毫无防范的情况下被传染. 同时, 人们的流动性又使得这类高传染性疾病不断扩散到整个社会, 引起整体人群的恐慌, 对社会秩序、经济也造成一定影响. 当政府察觉到这类疾病的高传染性时, 会采取相应的措施切断传染链, 逐步控制疾病的传染. 虽然人们相信在政府的有效措施下, 疾病最终会被控制住, 但是到底什么时候会结束, 就很难给出明确的答案了, 人们依然生活在恐慌之中. 在这种情况下, 建立防护措施下这类高传染性多潜伏期传染病的高维动态模型, 预测今后疫情的走势就具有很重要的意义了. 一般的传染病模型没有给出延迟的情况, 即多潜伏期时的情况, 也没有考虑政府防护措施生效后的情况 [1,2], 本文针对这类高传染性且多潜伏期疾病的特性, 给出了政府防护措施下疾病的高维动态模型.

本文将传染病流行范围内的人群分成四类:

S 类: 新收治的疑似病例.

I 类: 新收治的直接确诊病例, 指直接被确诊为患者的, 不包括由疑似病例转为的临床诊断病例.

收稿日期: 2003-06-10

基金项目: 国家自然科学基金和科技部重大基础研究前期研究专项资助项目

作者简介: 谈树萍 (1978-), 女, 山东胶州人, 博士研究生.

R 类: 新增迁出者, 包括新收治的直接确诊病例、新收治的疑似病例, 新发现的与疑似或确诊病例接触过的、需要隔离的人群, 以及新增加的为所有疑似、确诊或其他被隔离的人员服务的医务人员.

E 类: 易感者, 指未被迁出、也未被收治、但与感病者接触后容易受到感染者.

1 建模及分析

结合高传染性疾病的实际情况, 相关的研究结果以及传染病模型, 本文提出以下假设:

H1 除感病特征外, 易感人群的个体间没有任何差异, 新收治的疑似病例与新收治的确诊病例的个体在人群中的混合是均匀的. 而且单位时间内每一个新收治的确诊病人所接触的易感人群占全部易感人群的比率, 称为接触率, 随政府采取的措施逐渐生效而开始衰减, 之后成为常数.

H2 易感人群感病的机会与他接触确诊病人的机会成正比. 这个比率, 称为感病率, 随政府采取的措施逐渐生效而开始衰减, 之后成为常数.

H3 易感人群转为疑似的机会与他接触确诊病人的机会成正比, 这个比率, 称为疑似率, 随政府采取的措施逐渐生效而开始衰减, 之后成为常数.

H4 从疑似病例转为确诊病例的比率为常数, 称为转移率.

H5 易感人群与新收治的确诊病人或新收治的疑似病人接触后被隔离的比率, 称为隔离率, 为常数.

H6 潜伏期从 a_1 天到 a_2 天不等.

H7 不考虑出生与死亡的过程.

由假设 H1, 第 n 天新收治的疑似病例和新收治的确诊病例的人数为 n 的函数, 分别记为 $S(n)$, $I(n)$. 第 n 天的迁出者记为 $R(n)$, 第 n 天的易感人群记为 $E(n)$, 记整体人群为 N . 接触率、感病率、疑似率分别记为 $K_1(n)$, $K_2(n)$, $K_3(n)$, 转移率、隔离率分别记为 α , β , 潜伏期记为 p , $p = a_1, a_1 + 1, \dots, a_2$, 其中 a_1, a_2 为正整数.

注 1 根据 $E(n)$ 的定义及假设 H1, 第 n 天的易感人群 $E(n)$ 指第 n 天还未被迁出, 也未被收治者, 与感病者接触后容易受到感染, 并且除感病特征外, $E(n)$ 个体间没有任何差异. 那么第 n 天的易感人群 $E(n)$ 应该是从整体人群中除去第 n 天之前所有的迁出者, 因为这些迁出者由于已经迁出而无法接触到感病者, 从而不属于易感人群; 并且除去第 n 天新收治的疑似病例和新收治的确诊病例的人数. 根据以上分析, 有

$$E(n) = N - I(n) - S(n) - \sum_{j=1}^{n-1} R(j).$$

同理第 $n-p$ 天的易感人群

$$E(n-p) = N - I(n-p) - S(n-p) - \sum_{j=1}^{n-1-p} R(j), \quad p = a_1, a_1 + 1, \dots, a_2.$$

分析假设 H1. 接触率 $K_1(n)$ 随政府采取的措施逐渐生效而开始衰减, 之后成为正的常数. 在政府采取的措施生效初期, 虽然接触率 $K_1(n)$ 已经开始衰退, 但由于这时 $I(n)$ 和 $S(n)$ 的直

还是很大, 所以从新收治的传染病确诊及疑似病例人数上看效果不很明显. 本文研究效果明显显现出的情形. 假设政府采取措施 m_1 天后, $K_1(n)$ 保持为常数 μ_1 . 同样的分析, 假设政府采取措施 m_2 天后, 感病率 $K_2(n)$, 疑似率 $K_3(n)$ 分别保持为常数 μ_2, μ_3 . 由于本文只研究防护措施生效后的模型, 不妨从第 m 天计时, $m = \max\{m_1, m_2\}$. 以下的 n 均代表防护措施生效后的第 n 天.

由于政府采取了隔离措施, 与当天出现的新收治的直接确诊病例接触过的易感人群以及与当天出现的新收治的疑似病例接触过的易感人群以 β 的隔离率被隔离, 从而当潜伏期过后, 在遗漏人群中可能有新收治的确诊病例以及新收治的疑似病例出现. 由于只有与症状期病人接触后才可能被感染, 从而我们认为潜伏期过后出现的所有的确诊病例以及疑似病例仅可能从这部分被遗漏的易感人群中出现. 换言之, 第 n 天新收治的直接确诊病例仅可能从 p 天前这部分被遗漏的易感人群中出现, $p = a_1, a_1 + 1, \dots, a_2$. 又注意到假设 H7, 由以上分析, 进而假设每天未被隔离的但已经感染病毒的人群以 ϕ_p 的概率在 p 天后成为新收治的直接确诊病例. 注意到假设 H1-H6, 对 $\forall n > a_2$, 对新收治的直接确诊病例有

$$I(n) = \sum_{p=a_1}^{a_2} \phi_p \{I(n-p)\mu_1\mu_2E(n-p)(1-\beta) + S(n-p)\alpha\mu_1\mu_2E(n-p)(1-\beta)\}. \quad (1)$$

同样的分析, 对新收治的疑似病例有

$$S(n) = \sum_{p=a_1}^{a_2} \phi_p \{I(n-p)\mu_1\mu_3E(n-p)(1-\beta) + S(n-p)\alpha\mu_1\mu_3E(n-p)(1-\beta)\}. \quad (2)$$

对迁出人群有

$$R(n) = I(n) + I(n)K_1(n)E(n)\beta + S(n) + S(n)K_1(n)E(n)\beta. \quad (3)$$

从 (1)-(3) 式看到, 单日新收治的确诊及疑似病例数与当日的易感人群, 确诊及疑似病例数有关, 假设在政府防护措施下累积迁出人群 $\sum R(n)$ 在整体人群 N 中所占比例不大, 可以不考虑普通人群 $E(n)$ 的变化, 认为 $E(n)$ 恒定, 为整体人群 N .

记

$$\lambda_p = \phi_p(1-\beta)N\mu_1\mu_2, \quad (4)$$

$$\sigma_p = \phi_p(1-\beta)N\mu_1\mu_3, \quad (5)$$

$$\varsigma = \beta N\mu_1. \quad (6)$$

根据参数 $\phi_p, \alpha, \beta, N, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ 的含义, 参数 λ_p 表示整体人群中与一例直接确诊病人接触后未被隔离而且潜伏期 p 天过后成为直接确诊病例的人数, 参数 σ_p 表示整体人群中与一例直接确诊病人接触后未被隔离而且潜伏期 p 天过后成为疑似病例的人数, 参数 ς 表示整体人群中与一例直接确诊病人接触后被隔离的人数.

在新的参数下, 有

$$I(n) = \sum_{p=a_1}^{a_2} \{\lambda_p I(n-p) + \alpha\lambda_p S(n-p)\}, \quad (7)$$

