



带有时延和乘性量测噪音的离散时间多自主体系统的趋同控制

献给陈翰馥教授 80 华诞

宗小峰^{①②}, 李韬^{②*}, 张纪峰^①

① 中国科学院数学与系统科学研究院系统控制重点实验室, 北京 100190;

② 上海大学机电工程与自动化学院上海市电站自动化技术重点实验室, 上海 200072

E-mail: xfzong87816@gmail.com, sixumuzi@shu.edu.cn, jif@iss.ac.cn

收稿日期: 2015-12-26; 接受日期: 2016-03-25; 网络出版日期: 2016-09-30; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 61522310)、中国博士后科学基金 (批准号: 2015M571145)、上海市青年科技启明星计划 (批准号: 15QA1402000) 和国家重点基础研究发展计划 (“973” 计划) (批准号: 2014CB845301) 项目资助

摘要 本文研究带有时延和乘性量测噪音的离散时间多自主体系统的随机趋同控制. 利用图论、矩阵论和概率论中的分析工具, 将随机趋同问题转化成离散时间随机时延系统的随机稳定性问题. 通过建立随机稳定性准则, 给出了多自主体系统达到趋同所需的关于控制增益的充分条件. 针对一阶多自主体系统, 在平衡拓扑条件下证明对任何有界时延和任意强度的噪音, 都可以通过选取合适的控制增益来达到均方和几乎必然强趋同. 针对二阶多自主体系统, 在无向拓扑条件下给出了均方和几乎必然趋同的充分条件, 并证明对任意有界时延和任意强度的噪音, 都可以通过选取合适的控制增益来实现位移分量弱趋同和速度分量强趋同. 这些结果被进一步推广到具有领导者的情形.

关键词 多自主体系统 时延 乘性量测噪音 趋同

MSC (2010) 主题分类 60H30, 93E03, 93E15, 93C85

1 引言

多自主体系统的分布式趋同控制近年来备受系统控制界的关注, 至今, 对精确模型下的多自主体系统趋同控制问题的研究已日渐成熟 (参见文献 [1, 2]). 由于实际中的多自主体往往处在各种复杂的环境中, 多自主体之间的局部信息交换不可避免地会受到各种不确定性因素的影响, 如时延和量测噪音等, 因此, 近年来, 有大量的学者致力于带有时延或通信噪音的多自主体系统趋同控制的研究.

时延是多自主体系统协调控制中需要考虑的一个重要因素, 已经受到了广泛关注. 针对时延诱导的趋同控制, 许多学者提出了不同的控制算法. 文献 [1] 考虑了含有相同通信时延的一阶积分器多自主体网络在固定和时变拓扑下的平均趋同问题, 并指出只要网络拓扑在每个时刻是强连通的平衡有向图, 那么随着时间的推移, 多自主体的状态都能够达到趋同. 文献 [3] 研究了固定和时变拓扑下仅存在

引用格式: Zong X F, Li T, Zhang J F. Consensus control of discrete-time multi-agent systems with time delays and multiplicative measurement noises (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2016, 46: 1617–1636, doi: 10.1360/N012015-00398

传输时延的多自主体平均趋同问题, 证明了只要网络是连通的, 时延就不影响系统的趋同性能. 文献 [4] 给出了有界时变时延和分布式时延情形下平均趋同的充分条件, 并在常数时延情形下得到了平均趋同的充要条件. 文献 [5] 研究了异构时延对多自主体系统趋同的影响. 文献 [6] 针对三种不同类型的异构时延 (非自时延、一致的自时延和不同的自时延) 给出了线性多自主体系统集值型的趋同条件. 文献 [7] 得到了具有通信时延的二阶多自主体系统趋同的充要条件, 并给出了趋同所需的最优时延上界. 文献 [8] 考虑了具有时变通信时延的趋同跟踪问题, 分别讨论了固定和时变网络拓扑情形, 并在固定网络拓扑条件下, 得到了实现趋同跟踪的充要条件. 文献 [9] 讨论了具有不同的输入或通信时延的离散时间多自主体系统趋同问题, 基于频率分析方法, 得到了实现渐近趋同的充分条件; 并且指出当同时存在通信和输入时延时, 达到趋同的条件只与输入时延的大小有关而与通信时延无关.

带加性噪音或者乘性噪音的多自主体系统的趋同控制是当今分布式协同控制的研究热点, 其中加性噪音诱导的趋同控制问题占据了主导地位, 其目的是设计合适的控制律来克服加性噪音对多自主体系统的影响. 对于离散时间模型, 文献 [10–13] 利用随机逼近型算法来减弱加性噪音对系统的影响, 给出了均方趋同和几乎必然趋同的条件. 对于连续时间模型, 文献 [14] 针对带加性量测噪音的多自主体系统在平衡拓扑条件下给出了保证均方趋同的关于控制增益的充要条件. 文献 [15] 给出了保证均方和几乎必然弱趋同的充分条件和必要条件. 文献 [16, 17] 分别对于离散时间和连续时间的多自主体系统, 研究了加性噪音驱动的趋同问题. 文献 [18] 研究了加性噪音驱动的多自主体包含控制. 针对二阶积分器型带绝对状态反馈的多自主体系统, 文献 [19] 给出了均方和几乎必然平均趋同的充分条件和必要条件. 当时延和加性噪音同时存在于多自主体系统时, 文献 [20] 利用广义 Gronwall-Bellman-Halanay 不等式研究了带平衡拓扑的多自主体系统的随机强趋同的充分条件. 文献 [21] 针对无向拓扑的多自主体系统通过解耦的办法得到了随机强趋同和弱趋同的充分条件和必要条件.

乘性噪音是通信中另一类重要的不确定性因素 (参见文献 [22]). 与加性噪音不同, 这类噪音在随机系统的几乎必然稳定性中可以起到积极的镇定作用 (参见文献 [23, 24]). 至今, 带有乘性噪音的多自主体系统的趋同分析主要局限于一阶多自主体系统. 对于连续时间的模型, 文献 [25] 研究了带绝对的相对状态量测的乘性噪音的多自主体系统趋同控制; 文献 [26] 针对一般的乘性噪音给出了均方趋同的充分条件和必要条件, 并且首次揭示了乘性噪音可以对几乎必然趋同起到积极的作用. 文献 [21] 给出了时延和乘性噪音驱动的均方和几乎必然强趋同和弱趋同的充分条件. 对于离散时间模型, 文献 [27] 研究了带有时变拓扑多自主体系统的分布式平均趋同; 文献 [28] 研究了具有部分不变结构的系统的分布式平均趋同问题. 文献 [29] 在无向图的条件下将文献 [26] 中连续时间模型推广到离散时间的情形, 并给出了均方和几乎必然趋同的充分条件. 对于高阶 (包括二阶) 多自主体系统, 其乘性噪音经常以退化的形式存在, 分析这类系统的趋同问题具有一定的难度.

本文致力于带有时延和乘性噪音的离散时间多自主体系统的趋同控制研究. 利用图论和矩阵论的方法将多自主体系统转化为离散时间的随机时延方程, 其中确定性项和扩散项呈现出不同的时延. 尽管现在已有一些工作得到了带时延的一阶随机时延方程的稳定性分析 (如文献 [30]), 但是这些结论是基于不同的 Lyapunov 泛函得到的, 且经常以复杂的线性矩阵不等式的形式出现. 这类线性矩阵不等式的结果一方面无法显式地给出趋同增益需要满足的关于网络和系统参数的条件, 另一方面也无法确定扩散项中的时延对稳定性的影响. 另外, 针对具有二阶动力学的多自主体系统, 对应的随机时延方程是一个噪音退化的随机时延系统, 对于这类系统, 至今没有一个适合的随机稳定性准则. 因此, 建立合适的随机稳定性准则是我们研究趋同控制的前提. 本文首先通过构造离散时间的退化 Lyapunov 泛函 (连续时间的版本参见文献 [21, 31]), 建立了一个离散时间随机时延方程的均方指数稳定性和几乎必然指数稳定性准则. 该准则一方面给出了均方和几乎必然指数稳定的充分条件, 另一方面明确说明

了系统的稳定性可以不受扩散项中时延的影响, 而只依赖于确定性项中的时延. 然后基于该稳定性准则, 我们得到了带有时延和乘性噪音的一阶和二阶多自主体系统实现均方和几乎必然趋同的关于系统和控制参数的显式充分条件. 具体包括如下两个方面.

(1) 一阶多自主体系统的趋同控制. 针对无领导者的多自主体系统, 在平衡拓扑条件下得到了均方和几乎必然强趋同的充分条件. 该条件表明, 对任意的有界时延和噪音强度系数, 都可以选取合适的控制增益来保证随机强趋同, 这里控制增益的选取依赖于拓扑图、确定性量测中的时延、多自主体个数和噪音强度系数, 但并不依赖于噪音量测项中的时延. 针对有领导者的一阶多自主体系统, 证明了如果跟随者的通信拓扑图是强连通的无向图, 则对任意有界的时延和任意强度的噪音, 都可以通过选取充分小的趋同增益来保证均方和几乎必然领导 - 跟随趋同.

(2) 二阶多自主体系统的趋同控制. 针对无领导者的二阶多自主体系统, 在无向拓扑下得到了位移分量随机弱趋同以及速度分量随机强趋同的充分条件. 该条件给出了选取控制增益的新思路: 首先根据速度量测的噪音强度系数, 确定性量测的时延和拓扑图, 选取速度分量上的控制增益; 然后根据速度分量上的控制增益、位移量测的噪音强度系数、确定性量测的时延和拓扑图, 选择位移分量上的控制增益. 这些结论和方法被进一步借鉴到带有领导者的情形.

本文的结构如下: 第 2 节给出系统描述, 建立离散时间随机时延系统的稳定性准则. 基于此稳定性准则, 第 3 和 4 节分别给出一阶多自主体系统和二阶多自主体系统的均方和几乎必然趋同的充分条件, 并证明对任意的有界时延和噪音强度, 都可以通过调节控制增益来保证多自主体系统达到趋同. 第 5 节给出二阶多自主体系统的趋同控制仿真. 第 6 节总结全文, 并给出未来的工作展望.

记号 本文将用到以下记号. $\mathbb{N}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, \mathbb{R}^n 表示 n 维 Euclid 空间. 对于给定的向量或者矩阵 A , A^T 表示它的转置, $\|A\|$ 表示其 Euclid 范数. N 维矩阵 A 的特征值记为 $\{\lambda_1(A), \dots, \lambda_N(A)\}$. $\mathbf{1}_n$ 表示元素为 1 的 n 维列向量. $\eta_{N,i}$ 表示第 i 个元素为 1 而其他元素为 0 的 N 维列向量. I_N 表示 N 维单位矩阵. $J_N = \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T$. $A \otimes B$ 表示矩阵 A 和 B 的 Kronecker 积. 对于 $a, b \in \mathbb{R}$, $a \vee b$ 表示 $\max\{a, b\}$, 而 $a \wedge b$ 表示 $\min\{a, b\}$. 对于任意给定的对称矩阵 K , $\lambda_{\max}(K)$ 和 $\lambda_{\min}(K)$ 分别表示它的最大和最小特征值. 对给定的两个对称矩阵 A 和 B , $A > B$ (或者 $A \geq B$) 表示 $A - B$ 是正定矩阵 (或者 $A - B$ 是半正定矩阵). 而 $A < B$ (或者 $A \leq B$) 表示 $A - B$ 是负定矩阵 (或者 $A - B$ 是半负定矩阵). $A > 0$ (或者 $A \geq 0$) 表示 A 正定 (或半正定). $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 表示一个完备的概率空间, 其中流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 满足通常条件, 即它是递增的, 且 \mathcal{F}_0 包含所有的 \mathbb{P} -零集. 对于给定的随机变量或者向量 X , $\mathbb{E}X$ 表示其数学期望.

2 系统描述及随机稳定性准则

考虑 N 个自主体组成的系统, 其中各自主体之间的通信关系被描述成一个网络拓扑图 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$, 其中 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ 是节点的集合, i 表示第 i 个自主体, $\mathcal{E} = \{(j, i) \mid \text{自主体 } i \text{ 能直接接收到自主体 } j \text{ 的信息}\}$ 表示有向图的边集, 而 $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 表示图 \mathcal{G} 的邻接矩阵, $a_{ij} = 1$ 或者 0, 分别表示从自主体 j 到自主体 i 是否有边. 用 N_i 表示节点 i 的邻居, 即 $N_i = \{j \in \mathcal{V} \mid a_{ij} = 1\}$. \mathcal{G} 的 Laplace 矩阵记为 $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$, 其中 $\mathcal{D} = \text{diag}(\text{deg}_1, \dots, \text{deg}_N)$, $\text{deg}_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ 为节点 i 的度. 众所周知, \mathcal{L} 至少有一个零特征值, 记为 $\lambda_1 = \lambda_1(\mathcal{L})$.

本文主要考虑一阶和二阶的多自主体系统的趋同控制. 针对一阶多自主体系统, 我们假定第 i 个自主体状态的动力学模型为

$$x_i(t+1) = x_i(t) + u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1)$$

其中 $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$, $u_i(t) \in \mathbb{R}^n$ 表示在 t 时刻对第 i 个自主体的控制输入. 而针对二阶多自主体系统, 假定第 i 个自主体状态的动力学模型为

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t), \quad v_i(t+1) = v_i(t) + u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2)$$

其中 $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ 和 $v_i(t) \in \mathbb{R}^n$ 分别表示第 i 个自主体在 t 时刻的位移状态和速度状态.

在现实的网络系统中, 每个自主体从其邻居得到的相对状态量测信息经常受到噪声和时延的影响, 从而是不准确的和不及时的. 因此, 针对一阶多自主体系统, 我们假设第 i 个自主体从其邻居 j 获得的状态量测信息具有如下形式:

$$z_{ji}(t) = x_j(t-d_1) - x_i(t-d_1) + f_{0ji}(x_j(t-d_2) - x_i(t-d_2))\xi_{0ji}(t), \quad (2.3)$$

而控制输入 (或分布式协议) 设计为

$$u_i(t) = K \sum_{j \in N_i} a_{ij} z_{ji}(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad t \in \mathbb{N}_+, \quad (2.4)$$

其中 $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$ 是时延, $\{\xi_{0ji}(t)\}_{i,j=1}^N$ 是相互独立的噪音, $f_{0ji}(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是对应的噪音强度函数, K 是控制增益矩阵, 这里假定 K 是对称的. 针对二阶多自主体系统, 我们假设第 i 个自主体从其邻居 j 获得的位移量测信息和速度量测信息如下:

$$\begin{aligned} z_{1ji}(t) &= x_j(t-d_1) - x_i(t-d_1) + f_{1ji}(x_j(t-d_2) - x_i(t-d_2))\xi_{1ji}(t), \\ z_{2ji}(t) &= v_j(t-d_1) - v_i(t-d_1) + f_{2ji}(v_j(t-d_2) - v_i(t-d_2))\xi_{2ji}(t), \end{aligned}$$

而分布式协议设计为

$$u_i(t) = k_1 \sum_{j \in N_i} z_{1ji}(t) + k_2 \sum_{j \in N_i} z_{2ji}(t), \quad (2.5)$$

其中 $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $\xi_{1ji}(t)$ 和 $\xi_{2ji}(t)$ 是相互独立的噪音, $f_{1ji}(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_{2ji}(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是对应的噪音强度函数. 对上述噪音及其强度函数, 我们作如下假设.

假设 2.1 噪音 $\{\xi_{lji}(t) \in \mathbb{R}, l = 0, 1, 2, i = 1, 2, \dots, N, j \in N_i\}$ 是相互独立过程, 满足 $\mathbb{E}\xi_{lji}(s) = 0$, $\mathbb{E}|\xi_{lji}(s)|^2 = 1$, $\mathbb{E}[\xi_{lji}(s)\xi_{lji}(t)] = 0$, $t, s \geq 0$, $t \neq s$, $l = 0, 1, 2$, $i = 1, 2, \dots, N$, $j \in N_i$.

假设 2.2 假设 $f_{lji}(0) = 0$, 且存在常数 $\bar{\sigma}_l \geq 0$, 使得对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 都有

$$\|f_{lji}(x) - f_{lji}(y)\| \leq \bar{\sigma}_l \|x - y\|, \quad l = 0, 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j \in N_i.$$

将相应的控制输入代入一阶或者二阶动力学模型时, 将会得到一个离散时间的随机系统. 此时, 趋同问题转化成了如下离散时间随机时延系统的稳定性问题:

$$y(t+1) = (I + A_0)y(t) + A_1y(t-d_1) + M(t), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.6)$$

其中 A_0 和 A_1 是合适维数的矩阵, $M(t)$ 是依赖状态变量 $y(t-d_2)$ 离散时间的零均值鞅, 并满足: 对任意正定矩阵 P , 存在半正定矩阵 D_P , 使得

$$\mathbb{E}M^T(t)PM(t) \leq \mathbb{E}y^T(t-d_2)D_Py(t-d_2). \quad (2.7)$$

我们首先建立时延依赖的随机稳定性准则作为研究随机趋同问题的工具 (证明见附录 A).

定理 2.1 如果存在一个正定矩阵 P 使得

$$\Pi_P := (A_0 + A_1)^T P + P(A_0 + A_1) + (A_0 + A_1)^T P(A_0 + A_1)(1 + d_1) + A_1^T P A_1 d_1 + D_P < 0, \quad (2.8)$$

则存在正常数 C_0 和 γ 使得

$$\mathbb{E}\|y(t)\|^2 \leq C_0 e^{-\gamma t}, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|y(t)\| < -\frac{\gamma}{2}, \quad \text{a.s.},$$

即离散时间随机系统 (2.6) 是均方和几乎必然指数稳定的.

注 2.1 注意这个稳定性准则并不依赖于扩散项中的时延 d_2 . 事实上, 针对连续时间的情形, 也有类似的结果 (参见文献 [21]). 当 $d_1 = 0$ 时, 我们可以得到一个较简洁的随机稳定性结论, 即如果存在一个正定矩阵 P 使得

$$(A_0 + A_1)^T P + P(A_0 + A_1) + (A_0 + A_1)^T P(A_0 + A_1) + D_P < 0,$$

则离散时间系统 (2.6) 是均方和几乎必然指数稳定的.

3 一阶多自主体系统的趋同控制

3.1 无领导者的一阶多自主体系统的趋同控制

本小节考虑无领导者的一阶多自主体系统的趋同控制. 把 (2.3) 和 (2.4) 代入 (2.1), 将得到一个闭环的带时延的随机系统, 所以需要给出一段时间的初始值 $x(t) = \varphi(t) \in \mathbb{R}^{nN}$, $t = -m, -m+1, \dots, 0$, 其中 $m = d_1 \vee d_2$. 我们对网络拓扑图有如下假设.

假设 3.1 网络拓扑图 \mathcal{G} 为强连通的平衡图.

在该假设下, 我们用 $\hat{\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{L}^T + \mathcal{L}}{2}$ 来表示拓扑图 \mathcal{G} 的对称化图的 Laplace 矩阵. 易知 $\hat{\mathcal{L}}$ 有一个零特征根, 记为 $\hat{\lambda}_1$, 其他的特征根记为 $0 < \hat{\lambda}_2 \leq \dots \leq \hat{\lambda}_N$.

注意到随机系统具有多种不同意义下的渐近行为 (参见文献 [23]). 因此, 在随机背景下将呈现出多种意义下的趋同. 本节将讨论均方和几乎必然两种意义下的趋同问题.

定义 3.1 如果对任意的初始值 φ 和所有不同的 $i, j \in \mathcal{V}$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\|x_i(t) - x_j(t)\|^2 = 0$, 则称一阶多自主体系统 (2.1) 在分布式协议 u 下达到均方弱趋同. 进一步, 如果存在一个随机变量 $x^* \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\mathbb{E}\|x^*\|^2 < \infty$ 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\|x_i(t) - x^*\|^2 = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, 则称一阶多自主体系统 (2.1) 在分布式协议 u 下达到均方强趋同.

定义 3.2 如果对任意的初始值 φ 和所有不同的 $i, j \in \mathcal{V}$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0$ 几乎必然成立 (a.s.), 则称一阶多自主体系统 (2.1) 在分布式协议 u 下达到几乎必然弱趋同. 进一步, 如果存在一个随机变量 $x^* \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\mathbb{P}\{\|x^*\| < \infty\} = 1$ 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x^*\| = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$), a.s., 则称一阶多自主体系统 (2.1) 在分布式协议 u 下达到几乎必然强趋同.

在给定了分布式协议 (2.4) 情形下, 趋同问题的关键就在于如何选取控制增益矩阵 K 才能得到多自主体系统的均方或者几乎必然趋同.

下述引理来自文献 [32], 并将在本文主要定理的证明中用到.

引理 3.1 针对平衡图的 Laplace 矩阵 \mathcal{L} , 存在一个矩阵 $\phi \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}$ 使得矩阵 $\Phi = (\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{1}_N, \phi) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是非奇异的, 且

$$\Phi^{-1} = \Phi^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{1}_N^T \\ \phi^T \end{pmatrix}, \quad \Phi^{-1}\mathcal{L}\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathcal{L}} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

令 $\delta(t) = [(I_N - J_N) \otimes I_n]x(t)$, $\delta(t) = [\delta_1^T(t), \dots, \delta_N^T(t)]^T$, 其中 $\delta_i(t) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, N$. 令 $\delta(t) = (\Phi \otimes I_n)\tilde{\delta}(t)$, $\tilde{\delta}(t) = [\tilde{\delta}_1^T(t), \dots, \tilde{\delta}_N^T(t)]^T$, 其中 $\tilde{\delta}_i(t) \in \mathbb{R}^n$. 易知 $\tilde{\delta}_1(t) \equiv 0$. 令 $\bar{\delta}(t) = [\bar{\delta}_2^T(t), \dots, \bar{\delta}_N^T(t)]^T$.

定理 3.1 假定假设 2.1、2.2 和 3.1 成立. 如果

$$\mathcal{L}_K := (\tilde{\mathcal{L}}^T + \tilde{\mathcal{L}}) \otimes K - (\tilde{\mathcal{L}}^T \tilde{\mathcal{L}} \otimes K^2)(1 + 2d_1) - \frac{N-1}{N} \|K\|^2 \bar{\sigma}_0^2 (\tilde{\mathcal{L}}^T + \tilde{\mathcal{L}}) \otimes I_n > 0,$$

则一阶多自主体系统 (2.1) 在分布式协议 (2.4) 下达到均方和几乎必然强趋同.

证明 把分布式协议 (2.4) 代入 (2.1), 可得

$$x(t+1) = x(t) - (\mathcal{L} \otimes K)x(t-d_1) + \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\eta_{N,i} \otimes K f_{0ji}(x_j(t-d_2) - x_i(t-d_2)))\xi_{0ji}(t). \quad (3.2)$$

注意到 $(I_N - J_N)\mathcal{L} = \mathcal{L} = \mathcal{L}(I_N - J_N)$. 由 $\delta(t)$ 的定义及 (3.2) 得

$$\delta(t+1) = \delta(t) - (\mathcal{L} \otimes K)\delta(t-d_1) + M_1(t),$$

其中

$$M_1(t) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}((I_N - J_N)\eta_{N,i} \otimes K f_{0ji}(x_j(t-d_2) - x_i(t-d_2)))\xi_{0ji}(t).$$

再由 $\bar{\delta}$ 的定义可知,

$$\bar{\delta}(t+1) = \bar{\delta}(t) - (\tilde{\mathcal{L}} \otimes K)\bar{\delta}(t-d_1) + M_2(t), \quad (3.3)$$

其中

$$M_2(t) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}[\phi^T(I_N - J_N)\eta_{N,i} \otimes (K f_{0ji}(\delta_j(t-d_2) - \delta_i(t-d_2)))]\xi_{0ji}(t).$$

注意到 $(I_N - J_N)^2 = I_N - J_N$, $\phi\phi^T = I_N - J_N$,

$$[\phi^T(I_N - J_N)\eta_{N,i}]^T \phi^T(I_N - J_N)\eta_{N,i} = \eta_{N,i}^T(I_N - J_N)\eta_{N,i} = \frac{N-1}{N}. \quad (3.4)$$

由此及假设 2.1 和 2.2 可得

$$\mathbb{E}\|M_2(t)\|^2 \leq \|K\|^2 \bar{\sigma}_0^2 \frac{N-1}{N} \mathbb{E} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \|\delta_j(t-d_2) - \delta_i(t-d_2)\|^2.$$

注意到 \mathcal{G} 是平衡图, 由平衡图的 Laplace 矩阵的性质 (参见文献 [1]) 以及 $\bar{\delta}(t)$ 的定义可知,

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \|\delta_j(t) - \delta_i(t)\|^2 = \delta^T(t)((\mathcal{L}^T + \mathcal{L}) \otimes I_n)\delta(t) = \bar{\delta}^T(t)((\tilde{\mathcal{L}}^T + \tilde{\mathcal{L}}) \otimes I_n)\bar{\delta}(t). \quad (3.5)$$

因此,

$$\mathbb{E}\|M_2(t)\|^2 \leq \|K\|^2 \bar{\sigma}_0^2 \frac{N-1}{N} \mathbb{E} \bar{\delta}^\top(t-d_2) ((\tilde{\mathcal{L}}^\top + \tilde{\mathcal{L}}) \otimes I_n) \bar{\delta}(t-d_2).$$

由定理 2.1, 并取 $P = I_{n(N-1)}$ 可知, 如果矩阵 $\mathcal{L}_K > 0$, 则存在常数 $C_0, \gamma > 0$ 使得

$$\mathbb{E}\|\bar{\delta}(t)\|^2 \leq C_0 e^{-\gamma t}, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\bar{\delta}(t)\| < -\frac{\gamma}{2}, \quad \text{a.s.} \quad (3.6)$$

再由 $\bar{\delta}(t)$ 和 $\delta(t)$ 的定义知, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\|x_i(t) - x_j(t)\|^2 = 0$ 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\|^2 = 0$, a.s., 即均方和几乎必然弱趋同成立. 注意到 $\mathbf{1}_N^\top \mathcal{L} = 0$, 由 (3.2) 可得

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(0) + \frac{1}{N} M_3(t), \quad (3.7)$$

其中 $M_3(t) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} K \sum_{s=0}^{t-1} f_{0ji}(x_j(s-d_2) - x_i(s-d_2)) \xi_{0ji}(s)$. 由假设 2.1、2.2、3.1、(3.5) 和 (3.6) 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|M_3(t)\|^2 &\leq \bar{\sigma}_0^2 \|K\|^2 \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \mathbb{E}\|x_j(s-d_2) - x_i(s-d_2)\|^2 \\ &\leq 2\bar{\sigma}_0^2 \|K\|^2 \hat{\lambda}_N \left(\sum_{s=-d_2}^{-1} \mathbb{E}\|\bar{\delta}(t)\|^2 + C_0 \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\gamma s} \right) < \infty. \end{aligned}$$

根据鞅收敛定理^[33] 可知, $M_3(t)$ 均方和几乎必然收敛到一个随机变量, 记为 $M_3(\infty)$. 令

$$x^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(0) + \frac{1}{N} M_3(\infty), \quad (3.8)$$

则有

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\|x_i(t) - x^*\|^2 &\leq 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\| x_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(t) \right\|^2 + 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\| x^* - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(t) \right\|^2 = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x^*\| &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| x_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(t) \right\| + \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| x^* - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(t) \right\| = 0, \quad \text{a.s.}, \end{aligned}$$

其中我们用到了 $x_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_i(t) - x_j(t))$. 因此, 均方和几乎必然强趋同成立. \square

注 3.1 容易看出, $M_3(\infty)$ 是零均值的随机变量, 即 $\mathbb{E}M_3(\infty) = 0$, 从而结合 (3.8) 可知,

$$\mathbb{E}x^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(0).$$

因此, 上述结论在平衡图的假设下实际上得到了均方和几乎必然的平均趋同 (参见文献 [14, 21]).

若取 $K = kI_n$, 则可以给出显式的关于控制和系统参数的条件来保证均方和几乎必然强趋同.

推论 3.1 假定假设 2.1、2.2 和 3.1 成立, 且 $K = kI_n$. 如果

$$k < \frac{2\hat{\lambda}_2}{(1 + 2d_1)\lambda_{\max}(\mathcal{L}^\top \mathcal{L}) + 2\frac{N-1}{N}\bar{\sigma}_0^2\hat{\lambda}_2}, \quad (3.9)$$

则一阶多自主体系统 (2.1) 在分布式协议 (2.4) 下达到均方和几乎必然强趋同.

证明 注意到 (3.9) 暗示着 $1 - \frac{N-1}{N}k\bar{\sigma}_0^2 > 0$. 根据 \mathcal{L}_K 的定义可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_K &= k \left[(\tilde{\mathcal{L}}^T + \tilde{\mathcal{L}}) \left(1 - \frac{N-1}{N}k\bar{\sigma}_0^2 \right) - k\tilde{\mathcal{L}}^T\tilde{\mathcal{L}}(1+2d_1) \right] \otimes I_n \\ &\geq k \left[\lambda_{\min}(\tilde{\mathcal{L}}^T + \tilde{\mathcal{L}}) \left(1 - \frac{N-1}{N}k\bar{\sigma}_0^2 \right) - k\lambda_{\max}(\tilde{\mathcal{L}}^T\tilde{\mathcal{L}})(1+2d_1) \right] \otimes I_n.\end{aligned}$$

由 $\tilde{\mathcal{L}}$ 的定义可知, $\lambda_{\min}(\tilde{\mathcal{L}}^T + \tilde{\mathcal{L}}) = 2\hat{\lambda}_2$, $\lambda_{\max}(\tilde{\mathcal{L}}^T\tilde{\mathcal{L}}) = \lambda_{\max}(\mathcal{L}^T\mathcal{L})$. 所以, 如果 k 满足条件 (3.9), 则矩阵 $\mathcal{L}_K > 0$. 从而由定理 3.1 知均方和几乎必然强趋同成立. \square

特别地, 针对无向图, 我们有如下推论.

推论 3.2 假定假设 2.1 和 2.2 成立, 拓扑图 \mathcal{G} 是连通的无向图且 $K = kI_n$. 如果

$$k < \frac{2\lambda_2}{(1+2d_1)\lambda_N^2 + 2\frac{N-1}{N}\bar{\sigma}_0^2\lambda_2},$$

则多自主体系统在分布式协议 (2.4) 下达到均方和几乎必然强趋同, 其中 λ_2 和 λ_N 分别是 \mathcal{L} 的最小和最大非零特征值.

3.2 带有领导者的一阶多自主体系统的趋同控制

本小节将研究带有领导者的情形. 考虑一个包含 $N+1$ 个自主体的系统, 不妨标记为 $0, 1, 2, \dots, N$, 其中 0 表示领导者, 其余的表示跟随者. 考虑到领导者传递到跟随者的信息流, 我们引入一个有向拓扑图 $\tilde{\mathcal{G}} = \{\tilde{\mathcal{V}}, \tilde{\mathcal{A}}\}$ 来描述领导者与跟随者以及跟随者与跟随者之间的通信关系, 其中 $\tilde{\mathcal{V}} = \{0, 1, 2, \dots, N\}$,

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{N \times N} \\ a_0 & \mathcal{A} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}, \quad (3.10)$$

$\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $a_0 = [a_{10}, \dots, a_{N0}]^T$. 若 $0 \in N_i$, 则 $a_{i0} = 1$, 否则 $a_{i0} = 0$. 令 $b = \text{diag}(a_{10}, \dots, a_{N0})$. 用 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ 来表示 N 个跟随者形成的子图, 其中 $\mathcal{V} = \tilde{\mathcal{V}} \setminus \{0\}$. 记 $\mathcal{L}_b = \mathcal{L} + b$, 其中 \mathcal{L} 是子图 \mathcal{G} 的 Laplace 矩阵. 这里假设该子图是无向图.

假设 3.2 假定有向拓扑图 $\tilde{\mathcal{G}}$ 含有一颗生成树, 且其子图 \mathcal{G} 是无向图.

易知在假设 3.2 下, \mathcal{L}_b 是一个正定矩阵 (参见文献 [34]), 因而存在一个正交矩阵 Φ 使得 $\Phi^T\mathcal{L}_b\Phi = \Lambda_b$, 其中 $\Lambda_b = \text{diag}(\lambda_{1b}, \dots, \lambda_{Nb})$, $0 < \lambda_{1b} \leq \dots \leq \lambda_{Nb}$.

一般来讲, 领导者的行为是独立于跟随者的信息. 这里, 我们用 $x_0(t)$ 来表示领导者的状态, 并假定其是固定常数 $x_0(t) = x_0$. 针对跟随者 i , 我们假定其状态满足方程 (2.1), 而控制输入 $u_i(t)$ 由 (2.4) 定义. 注意, 这里的控制输入 $u_i(t)$ 与上一节有本质的不同, 因为对于每个自主体 i , 其邻居 N_i 有可能包含了领导者 0.

研究带有领导者的多自主体系统的目的在于分析如何选择控制增益来使得跟随者的状态能够趋同于领导者的状态, 称为领导 - 跟随趋同.

定义 3.3 如果对任意跟随者的初始值 φ 和 $i \in \mathcal{V}$, 都有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\|x_i(t) - x_0(t)\|^2 = 0$ (或者 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_0(t)\| = 0$, a.s.), 则称带领导者的一阶多自主体系统在协议 u 下达到均方 (或几乎必然) 领导 - 跟随趋同.

定理 3.2 假定假设 2.1、2.2 和 3.2 成立. 如果

$$\mathcal{L}_K = 2\mathcal{L}_b \otimes K - (\mathcal{L}_b^2 \otimes K^2)(1 + 2d_1) - \|K\|^2 \sigma_0^2 (2\mathcal{L} + b) \otimes I_n > 0,$$

则带领导者的一阶多自主体系统在协议 (2.4) 下达到均方和几乎必然领导 - 跟随趋同.

证明 注意到分布式协议 (2.4) 中含有领导者的信息, 因此, 把分布式协议 (2.4) 代入 (2.1) 可得

$$x(t+1) = x(t) - (\mathcal{L}_b \otimes K)x(t-d_1) + (b \otimes K)(\mathbf{1}_N \otimes x_0) + \widehat{M}_1(t), \quad (3.11)$$

其中 $\widehat{M}_1(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N a_{ij}(\eta_{N,i} \otimes K f_{0ji}(x_j(t-d_2) - x_i(t-d_2)))\xi_{0ji}(t)$. 令 $\delta_i(t) = x_i(t) - x_0, i = 1, \dots, N$, $\delta(t) = [\delta_1^T(t), \dots, \delta_N^T(t)]^T$. 注意到 $\mathcal{L}\mathbf{1}_N = 0$, 由 (3.11) 可得

$$\delta(t+1) = \delta(t) - (\mathcal{L}_b \otimes K)\delta(t-d_1) + \widehat{M}_2(t),$$

其中 $\widehat{M}_2(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N a_{ij}(\eta_{N,i} \otimes K f_{0ji}(\delta_j(t-d_2) - \delta_i(t-d_2)))\xi_{0ji}(t)$. 由此以及假设 2.1 和 2.2 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|\widehat{M}_2(t)\|^2 &\leq \|K\|^2 \sigma_0^2 \mathbb{E} \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N a_{ij} \|\delta_j(t-d_2) - \delta_i(t-d_2)\|^2 \\ &\leq \|K\|^2 \sigma_0^2 \delta^T(t-d_2) [(2\mathcal{L} + b) \otimes I_n] \delta(t-d_2), \end{aligned} \quad (3.12)$$

这里, 我们用到了无向图 Laplace 矩阵的性质 (3.5). 因此, 由定理 2.1, 并取 $P = I_{n(N-1)}$ 可知, 如果矩阵 $\mathcal{L}_K > 0$, 则存在常数 $C_0, \gamma > 0$ 使得

$$\mathbb{E}\|\delta(t)\|^2 < C_0 e^{-\gamma t}, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\delta(t)\| < -\frac{\gamma}{2}, \quad \text{a.s.}$$

再由 $\delta(t)$ 的定义知, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\|x_i(t) - x_0\|^2 = 0$ 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_0\|^2 = 0, \text{ a.s.}$, 即均方和几乎必然领导 - 跟随趋同成立. \square

推论 3.3 假定假设 2.1、2.2 和 3.2 成立, 且 $K = kI_n$. 如果

$$k < \frac{2\lambda_{1b}}{(1 + 2d_1)\lambda_{Nb}^2 + 2\sigma_0^2\lambda_{1b}}, \quad (3.13)$$

则带领导者的一阶多自主体系统在分布式协议 (2.4) 下达到均方和几乎必然领导 - 跟随趋同.

证明 我们把不等式 (3.12) 进一步放大, 可得

$$\mathbb{E}\|\widehat{M}_2(t)\|^2 \leq 2\|K\|^2 \sigma_0^2 \delta^T(t-d_2)(\mathcal{L}_b \otimes I_n)\delta(t-d_2),$$

因此, 为实现均方和几乎必然领导 - 跟随趋同, 只需要 $\bar{\mathcal{L}}_K := 2\mathcal{L}_b \otimes K - (\mathcal{L}_b^2 \otimes K^2)(1 + 2d_1) - 2\|K\|^2 \sigma_0^2 (\mathcal{L}_b \otimes I_n) > 0$. 令 $K = kI_n$, 可知 $\bar{\mathcal{L}}_K > 0$ 是条件 (3.13) 的直接结论. 证毕. \square

4 二阶多自主体系统的趋同控制

4.1 无领导者的二阶多自主体系统的趋同控制

本小节考虑无领导者的二阶多自主体系统, 并对网络拓扑图 \mathcal{G} 作如下假设.

假设 4.1 网络拓扑图 \mathcal{G} 是一个强连通的无向图.

与一阶多自主体系统不同, 二阶多自主体系统的趋同控制是对速度进行控制, 而对于位移没有直接加控制输入. 这使得位移分量上一般只能达到弱趋同. 针对二阶多自主体系统的趋同, 我们对位移和速度这两个不同的分量沿用一阶多自主体系统关于强、弱趋同的定义.

记 $x(t) = [x_1^T(t), \dots, x_N^T(t)]^T$ 和 $v(t) = [v_1^T(t), \dots, v_N^T(t)]^T$. 定义 $\delta_g(t) = (I_N - J_N)g(t)$, $g = x, v$ 和 $\delta(t) = [\delta_x^T(t), \delta_v^T(t)]^T$. 令 $\delta_g(t) = [\delta_{g1}^T(t), \dots, \delta_{gN}^T(t)]^T$, 其中 $\delta_{gi}(t) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, N$. 根据连通无向图的 Laplace 矩阵的性质, 我们定义一个单位正交矩阵 $\Phi = [\frac{1}{\sqrt{N}}, \phi_2, \dots, \phi_N]$, 其中 ϕ_i 是 \mathcal{L} 的、关于特征值 $\lambda_i(\mathcal{L})$ 的单位特征向量, 即 $\phi_i^T \mathcal{L} = \lambda_i(\mathcal{L})\phi_i^T$, $\|\phi_i\| = 1$, $i = 2, \dots, N$. 令 $\phi = [\phi_2, \dots, \phi_N]$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_2, \dots, \lambda_N)$, 其中 $\lambda_i = \lambda_i(\mathcal{L})$, $0 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$. 令 $\delta_q(t) = (\Phi \otimes I_n)\tilde{\delta}_q(t)$, $\tilde{\delta}_q(t) = [\tilde{\delta}_{q1}^T(t), \dots, \tilde{\delta}_{qN}^T(t)]^T$, 容易验证 $\tilde{\delta}_{q1}(t) \equiv 0$. 记 $\bar{\delta}_q(t) = [\bar{\delta}_{q2}^T(t), \dots, \bar{\delta}_{qN}^T(t)]^T$, $q = x, v$, 而 $\bar{\delta}(t) = [\bar{\delta}_x^T(t), \bar{\delta}_v^T(t)]^T$. 定义 $\phi(i) = \phi^T(I_N - J_N)\eta_{N,i}$, $L = L_0 + L_1$, 其中

$$L_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_{N-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_1\Lambda & -k_2\Lambda \end{bmatrix}.$$

定理 4.1 假定假设 2.1、2.2 和 4.1 成立. 如果

$$k_1 \left[\left(\bar{\sigma}_1^2 \frac{N-1}{N} + \lambda_N(1+2d_1) \right) (2 + k_1(1+d_1)^2\lambda_N) + \lambda_2(1+d_1) \right] < 2k_2 \left[\left(1 - k_2\bar{\sigma}_2^2 \frac{N-1}{N} \right) \lambda_2 - k_2\lambda_N^2(1+2d_1) \right], \quad (4.1)$$

则二阶多自主体系统 (2.2) 在分布式协议 (2.5) 下, 位移分量达到均方和几乎必然弱趋同, 而速度分量达到均方和几乎必然强趋同.

证明 将协议 (2.5) 代入系统 (2.2) 可得

$$v(t+1) = v(t) - k_1(\mathcal{L} \otimes I_n)x(t-d_1) - k_2(\mathcal{L} \otimes I_n)v(t-d_1) + \bar{M}(t), \quad (4.2)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{M}(t) = & k_1 \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\eta_{N,i} \otimes f_{1ji}(x_j(t-d_2) - x_i(t-d_2)))\xi_{1ji}(t) \\ & + k_2 \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\eta_{N,i} \otimes f_{2ji}(v_j(t-d_2) - v_i(t-d_2)))\xi_{2ji}(t). \end{aligned}$$

根据 $\bar{\delta}_q(t)$ 的定义知,

$$\begin{cases} \bar{\delta}_x(t+1) = \bar{\delta}_x(t) + \bar{\delta}_v(t), \\ \bar{\delta}_v(t+1) = \bar{\delta}_v(t) - k_1(\Lambda \otimes I_n)\bar{\delta}_x(t-d_1) - k_2(\Lambda \otimes I_n)\bar{\delta}_v(t-d_1) + \bar{M}_1(t) + \bar{M}_2(t), \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{M}_1(t) = & k_1 \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\phi(i) \otimes f_{1ji}(\delta_{xj}(t-d_2) - \delta_{xi}(t-d_2)))\xi_{1ji}(s), \\ \bar{M}_2(t) = & k_2 \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\phi(i) \otimes f_{2ji}(\delta_{vj}(t-d_2) - \delta_{vi}(t-d_2)))\xi_{2ji}(t). \end{aligned}$$

再由 $\bar{\delta}$ 的定义可得

$$\bar{\delta}(t+1) = \bar{\delta}(t) + (L_0 \otimes I_n)\bar{\delta}(t) + (L_1 \otimes I_n)\bar{\delta}(t-d_1) + \bar{M}_3(t) + \bar{M}_4(t), \quad (4.3)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{M}_3(t) &= k_1 \sum_{i,j=1}^N a_{ij} B_{1ij}(t) \xi_{1ji}(t), \quad \bar{M}_4(t) = k_2 \sum_{i,j=1}^N a_{ij} B_{2ij}(t) \xi_{2ji}(t), \\ B_{1ij}(t) &= [0, b_{1ij}^T(t)]^T, \quad b_{1ij}(t) = \phi(i) \otimes f_{1ji}(\delta_{xj}(t-d_2) - \delta_{xi}(t-d_2)), \\ B_{2ij}(t) &= [0, b_{2ij}^T(t)]^T, \quad b_{2ij}(t) = \phi(i) \otimes f_{2ji}(\delta_{vj}(t-d_2) - \delta_{vi}(t-d_2)). \end{aligned}$$

由无向图的 Laplace 矩阵的性质 (参见文献 [1]) 可知,

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \|\delta_{qj}(t) - \delta_{qi}(t)\|^2 = \delta_q^T(t) (\mathcal{L} \otimes I_n) \delta_q(t) = \bar{\delta}_q^T(t) (\Lambda \otimes I_n) \bar{\delta}_q(t), \quad q = x, v. \quad (4.4)$$

令 $P = \bar{P} \otimes I_n$, 其中

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \mu\Lambda & \theta I_{N-1} \\ \theta I_{N-1} & I_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$\mu, \theta > 0$ 待定, 则由假设 2.1、2.2 和 (4.4) 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \bar{M}_3^T(t) P \bar{M}_3(t) &= k_1^2 \mathbb{E} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \|b_{1ij}(t)\|^2 \\ &\leq k_1^2 \sigma_1^2 \frac{N-1}{N} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \mathbb{E} \|\delta_{xj}(t-d_2) - \delta_{xi}(t-d_2)\|^2 \\ &= 2k_1^2 \sigma_1^2 \frac{N-1}{N} \mathbb{E} \bar{\delta}_x^T(t-d_2) (\Lambda \otimes I_n) \bar{\delta}_x(t-d_2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

类似地, 我们可以得到

$$\mathbb{E} \bar{M}_4^T(t) P \bar{M}_4(t) \leq 2k_2^2 \sigma_2^2 \frac{N-1}{N} \mathbb{E} \bar{\delta}_v^T(t-d_2) (\Lambda \otimes I_n) \bar{\delta}_v(t-d_2). \quad (4.7)$$

令 $\bar{M}_{34}(t) = \bar{M}_3 + \bar{M}_4$. 结合 (4.6) 和 (4.7) 可得

$$\mathbb{E} \bar{M}_{34}^T(t) P \bar{M}_{34}(t) \leq \mathbb{E} \bar{\delta}^T(t-d_2) (D \otimes I_n) \bar{\delta}(t-d_2),$$

其中

$$D = \begin{bmatrix} 2k_1^2 \sigma_1^2 \frac{N-1}{N} \Lambda & 0 \\ 0 & 2k_2^2 \sigma_2^2 \frac{N-1}{N} \Lambda \end{bmatrix}.$$

由定理 2.1 知, 为了保证方程 (4.3) 的均方指数稳定性, 只需要

$$S := L^T \bar{P} + \bar{P} L + L^T \bar{P} L (1 + d_1) + L_1^T \bar{P} L_1 d_1 + D < 0. \quad (4.8)$$

接下来, 我们选取 μ 和 θ 来保证 $P > 0$ 且 $S < 0$. 通过直接计算可知,

$$L^T \bar{P} + \bar{P} L = \begin{bmatrix} -2k_1 \theta \Lambda & (\mu - k_1 - k_2 \theta) \Lambda \\ (\mu - k_1 - k_2 \theta) \Lambda & 2(\theta I_{N-1} - k_2 \Lambda) \end{bmatrix},$$

$$L^T \bar{P} L = \begin{bmatrix} k_1^2 \Lambda^2 & -k_1 \theta \Lambda + k_1 k_2 \Lambda^2 \\ -k_1 \theta \Lambda + k_1 k_2 \Lambda^2 & \mu \Lambda - 2k_2 \theta \Lambda + k_2^2 \Lambda^2 \end{bmatrix},$$

且

$$L_1^T \bar{P} L_1 = \begin{bmatrix} k_1^2 \Lambda^2 & k_1 k_2 \Lambda^2 \\ k_1 k_2 \Lambda^2 & k_2^2 \Lambda^2 \end{bmatrix}.$$

选取 $\mu = k_1 + \theta k_2 + k_1 \theta (1 + d_1)$. 令 $s_{11}(\theta) = -2k_1 \theta \Lambda + k_1^2 \Lambda^2 (1 + 2d_1) + 2k_1^2 \bar{\sigma}_1^2 \frac{N-1}{N} \Lambda$, $s_{22}(\theta) = 2(\theta I_{N-1} - k_2 \Lambda) + [k_1 - k_2 \theta + k_1 \theta (1 + d_1)] \Lambda (1 + d_1) + k_2^2 \Lambda^2 (1 + 2d_1) + 2k_2^2 \bar{\sigma}_2^2 \frac{N-1}{N} \Lambda$, 则

$$S = \begin{bmatrix} s_{11}(\theta) & k_1 k_2 \Lambda^2 (1 + 2d_1) \\ k_1 k_2 \Lambda^2 (1 + 2d_1) & s_{22}(\theta) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} S_{11}(\theta) & 0 \\ 0 & S_{22}(\theta) \end{bmatrix},$$

其中 $S_{11}(\theta) = s_{11}(\theta) + k_1^2 \Lambda^2 (1 + 2d_1)$, $S_{22}(\theta) = s_{22}(\theta) + k_2^2 \Lambda^2 (1 + 2d_1)$. 因此, 为了保证 $S < 0$, 只需要 $S_{11}(\theta) < 0$, $S_{22}(\theta) < 0$. 容易验证, 当 $\theta > \theta_1 := k_1 \bar{\sigma}_1^2 \frac{N-1}{N} + k_1 \lambda_N (1 + 2d_1)$ 时, $S_{11}(\theta) < 0$; 当 $\theta < \theta_2$ 时, $S_{22}(\theta) < 0$, 其中

$$\theta_2 = \frac{[2k_2 - 2k_2 \bar{\sigma}_2^2 \frac{N-1}{N} - k_1 (1 + d_1)] \lambda_2 - 2k_2^2 \lambda_N^2 (1 + 2d_1)}{2 + k_1 (1 + d_1)^2 \lambda_N}.$$

注意到条件 (4.1) 意味着 $\theta_1 < \theta_2$. 所以, 选取 $\mu = k_1 + \theta k_2 + k_1 \theta (1 + d_1)$ 和 $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, 则可使 $S < 0$. 接下来将证明这种选取也能保证 P 是正定的. 易知, P 是正定的当且仅当 $\theta^2 < \mu \lambda_2$. 这需要一元二次方程 $\theta^2 - [k_2 + k_1 (1 + d_1)] \lambda_2 \theta - k_1 \lambda_2 = 0$ 有正根. 事实上, 我们可以算出该一元二次方程的正根为

$$\theta^* := \frac{[k_2 + k_1 (1 + d_1)] \lambda_2 + \sqrt{[k_2 + k_1 (1 + d_1)]^2 \lambda_2^2 + 4k_1 \lambda_2}}{2}.$$

容易验证 $\theta_2 < \theta^*$. 所以选取 $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ 保证了 P 的正定性. 因此, 利用定理 2.1 可知, 存在正常数 $C_0, \gamma > 0$ 使得

$$\mathbb{E} \|\bar{\delta}(t)\|^2 \leq C_0 e^{-\gamma t}, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\bar{\delta}(t)\| < -\frac{\gamma}{2}, \quad \text{a.s.} \quad (4.9)$$

再根据本节 $\bar{\delta}(t)$ 的定义可知, 二阶多自主体系统在分布式协议 (2.5) 下, 位移和速度分量达到均方和几乎必然弱趋同.

接下来, 我们需要证明多自主体系统在分布式协议 (2.5) 下速度分量达到均方和几乎必然强趋同. 由 (4.2) 以及 Laplace 矩阵 \mathcal{L} 的性质可得

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v_j(t+1) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v_j(t) + \frac{1}{N} \bar{M}_5(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v_j(0) + \frac{1}{N} \sum_{s=0}^t \bar{M}_5(s),$$

其中 $\bar{M}_5(t) = k_1 \sum_{i,j=1}^N a_{ij} f_{1ji}(x_j(t-d_2) - x_i(t-d_2)) \xi_{1ji}(t) + k_2 \sum_{i,j=1}^N a_{ij} f_{2ji}(v_j(t-d_2) - v_i(t-d_2)) \xi_{2ji}(t)$. 易知 $\bar{M}_6(t) := \sum_{s=0}^t \bar{M}_5(s)$ 是一个离散时间的零均值鞅, 并且对其二阶距有如下估计:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\bar{M}_6(t)\|^2 &= k_1^2 \sum_{s=0}^t \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \mathbb{E} \|f_{1ji}(x_j(s-d_2) - x_i(s-d_2))\|^2 \\ &\quad + k_2^2 \sum_{s=0}^t \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \mathbb{E} \|f_{2ji}(v_j(s-d_2) - v_i(s-d_2))\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq k_1^2 \bar{\sigma}_1^2 \mathbb{E} \sum_{s=0}^t \bar{\delta}_x^\top(s-d_2) (\Lambda \otimes I_n) \bar{\delta}_x(s-d_2) \\ &\quad + k_2^2 \bar{\sigma}_2^2 \mathbb{E} \sum_{s=0}^t \bar{\delta}_v^\top(s-d_2) (\Lambda \otimes I_n) \bar{\delta}_v(s-d_2) \\ &\leq (k_1^2 \bar{\sigma}_1^2 + k_2^2 \bar{\sigma}_2^2) \lambda_N \sum_{s=0}^{\infty} \mathbb{E} \|\bar{\delta}(s-d_2)\|^2 < \infty, \end{aligned}$$

这里用到了假设 2.1、2.2、Laplace 矩阵性质、(4.4) 和 (4.9). 因此, 利用定理 3.1 的证明技巧, 可以得到二阶多自主体系统的速度分量达到了均方和几乎必然强趋同. \square

注 4.1 定理 4.1 表明, 对任意的时延 d_1 和 d_2 , 我们都可以通过设计控制增益 k_1 和 k_2 来使得多自主体系统达到均方和几乎必然趋同. 事实上, 对任意给定的 d_1 和 d_2 , 我们首先选取 k_2 使得 $k_2 < \frac{\lambda_2}{(1+2d_1)\lambda_N^2 + \bar{\sigma}_2^2 \frac{N-1}{N} \lambda_2}$. 此时, 我们可以得到 $p_1 := 2k_2[(1 - k_2 \bar{\sigma}_2^2 \frac{N-1}{N})\lambda_2 - k_2 \lambda_N^2(1 + 2d_1)] > 0$. 再选取 k_1 使得 $k_1 p_2(k_1) < p_1$, 其中 $p_2(k_1) = (\bar{\sigma}_1^2 \frac{N-1}{N} + \lambda_N(1 + 2d_1))(2 + k_1(1 + d_1)^2 \lambda_N) + \lambda_2(1 + d_1)$. 进而, 条件 (4.1) 成立. 另外, 由于条件 (4.1) 不涉及时延 d_2 , 因此, 只需根据关于 d_1 的条件 (4.1) 来设计控制增益.

推论 4.1 假定假设 2.1、2.2 和 4.1 成立, 且 $d_1 = 0$. 如果

$$k_1 \left[\left(\bar{\sigma}_1^2 \frac{N-1}{N} + \lambda_N \right) (2 + k_1 \lambda_N) + \lambda_2 \right] < 2k_2 \left[\left(1 - k_2 \bar{\sigma}_2^2 \frac{N-1}{N} \right) \lambda_2 - k_2 \lambda_N^2 \right],$$

则二阶多自主体系统在分布式协议 (2.5) 下, 位移分量达到均方和几乎必然弱趋同, 而速度分量达到均方和几乎必然强趋同.

针对二阶的多自主体系统的趋同控制, 我们只得到了无向图情形下的趋同分析. 针对平衡图, 或者一般的有向图, 如何给出显式的关于控制增益的条件来保证随机趋同是一个更困难的问题, 即使是对非时延的情形, 至今没有文献涉及. 我们的研究方法可以应用于一些具有特殊拓扑结构的多自主体系统的趋同分析, 如下一小节所考虑的带有领导者的二阶多自主体系统.

4.2 带有领导者的二阶多自主体系统的趋同控制

本小节研究带有领导者的二阶多自主体系统的趋同控制问题. 假设领导者 0 的位移分量 $x_0(t)$ 满足方程

$$x_0(t+1) = x_0(t) + v_0, \tag{4.10}$$

其中 v_0 表示领导者的速度, 并假定它是一个常数. 针对跟随者 i , 我们假定其状态满足形式 (2.2), 而控制输入 $u_i(t)$ 由 (2.5) 定义. 同样地, 控制输入 $u_i(t)$ 中包含了领导者的信息, 因为对于每个多自主体 i , 其邻居 N_i 有可能包含了领导者 0. 对于二阶多自主体系统的领导 - 跟随趋同的定义可以根据定义 3.3 分别针对位移分量和速度分量来定义, 为了避免重复, 这里省略. 令 $L = \bar{L}_0 + L_{1b}$, 其中

$$\bar{L}_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_N \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_{1b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_1 \Lambda_b & -k_2 \Lambda_b \end{bmatrix}.$$

定理 4.2 假定假设 2.1、2.2 和 3.2 成立. 如果

$$k_1 [(\bar{\sigma}_1^2 + \lambda_{Nb}(1 + 2d_1))(2 + k_1(1 + d_1)^2 \lambda_{Nb}) + \lambda_{1b}(1 + d_1)]$$

$$< 2k_2[(1 - k_2\bar{\sigma}_2^2)\lambda_{1b} - k_2\lambda_{Nb}^2(1 + 2d_1)],$$

则带领导者的二阶多自主体系统在分布式协议 (2.5) 下达到均方和几乎必然领导 - 跟随趋同.

证明 考虑到领导者的存在, 把协议 (2.5) 代入 (2.2) 可得

$$v(t+1) = v(t) - k_1(\mathcal{L}_b \otimes I_n)x(t-d_1) - k_2(\mathcal{L}_b \otimes I_n)v(t-d_1) + \widetilde{M}_1(t),$$

其中

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_1(t) &= k_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N a_{ij}(\eta_{N,i} \otimes f_{1ji}(x_j(t-d_2) - x_i(t-d_2)))\xi_{1ji}(t) \\ &\quad + k_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N a_{ij}(\eta_{N,i} \otimes f_{2ji}(v_j(t-d_2) - v_i(t-d_2)))\xi_{2ji}(t). \end{aligned}$$

令 $\delta_{xi}(t) = x_i(t) - x_0(t)$, $\delta_{vi}(t) = v_i(t) - v_0$, $i = 1, \dots, N$, 记 $\delta_q(t) = [\delta_{q1}^T(t), \dots, \delta_{qN}^T(t)]^T$, $\bar{\delta}_q(t) = \Phi^T \delta_q(t)$, $q = x, v$, 则易知, $\bar{\delta}_x(t+1) = \bar{\delta}_x(t) + \bar{\delta}_v(t)$, 且

$$\bar{\delta}_v(t+1) = \bar{\delta}_v(t) - k_1(\Lambda_b \otimes I_n)\bar{\delta}_x(t-d_1) - k_2(\Lambda_b \otimes I_n)\bar{\delta}_v(t-d_1) + \widetilde{M}_2(t) + \widetilde{M}_3(t),$$

其中

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_2(t) &= k_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N a_{ij}(\Phi^T \eta_{N,i} \otimes f_{1ji}(\delta_{xj}(t-d_2) - \delta_{xi}(t-d_2)))\xi_{1ji}(s), \\ \widetilde{M}_3(t) &= k_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N a_{ij}(\Phi^T \eta_{N,i} \otimes f_{2ji}(\delta_{vj}(t-d_2) - \delta_{vi}(t-d_2)))\xi_{2ji}(t). \end{aligned}$$

令 $\bar{\delta}(t) = [\bar{\delta}_x^T(t), \bar{\delta}_v^T(t)]^T$, 则

$$\bar{\delta}(t+1) = \bar{\delta}(t) + (\bar{L}_0 \otimes I_n)\bar{\delta}(t) + (L_{1b} \otimes I_n)\bar{\delta}(t-d_1) + \widetilde{M}_4(t) + \widetilde{M}_5(t),$$

其中 $\widetilde{M}_3(t) = k_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N a_{ij} \bar{B}_{1ij}(t) \xi_{1ji}(t)$, $\widetilde{M}_4(t) = k_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N a_{ij} \bar{B}_{2ij}(t) \xi_{2ji}(t)$, $\bar{B}_{1ij}(t) = [0, \bar{b}_{1ij}^T(t)]^T$, $\bar{b}_{1ij}(t) = \Phi^T \eta_{N,i} \otimes f_{1ji}(\delta_{xj}(t-d_2) - \delta_{xi}(t-d_2))$, $\bar{B}_{2ij}(t) = [0, \bar{b}_{2ij}^T(t)]^T$, $\bar{b}_{2ij}(t) = \Phi^T \eta_{N,i} \otimes f_{2ji}(\delta_{vj}(t-d_2) - \delta_{vi}(t-d_2))$. 令 $P = \bar{P} \otimes I_n$, 其中 $\bar{P} = \begin{bmatrix} \mu \Lambda_b & \theta I_N \\ \theta I_N & I_N \end{bmatrix}$, $\mu, \theta > 0$ 待定. 注意到 $[\Phi^T \eta_{N,i}]^T \Phi^T \eta_{N,i} = 1$. 由无向图的 Laplace 矩阵的性质 (4.4) 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \widetilde{M}_4^T(t) P \widetilde{M}_4(t) &= k_1^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N a_{ij} \|\bar{b}_{1ij}(t)\|^2 \\ &\leq k_1^2 \bar{\sigma}_1^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N a_{ij} \|\delta_{xj}(t-d_2) - \delta_{xi}(t-d_2)\|^2 \\ &= k_1^2 \bar{\sigma}_1^2 \delta_x^T(t-d_2) [(2\mathcal{L} + b) \otimes I_n] \delta_x(t-d_2) \\ &\leq 2k_1^2 \bar{\sigma}_1^2 \bar{\delta}_x^T(t-d_2) (\Lambda_b \otimes I_n) \bar{\delta}_x(t-d_2). \end{aligned}$$

类似地,

$$\mathbb{E} \widetilde{M}_5^T(t) P \widetilde{M}_5(t) \leq 2k_2^2 \bar{\sigma}_2^2 \bar{\delta}_v^T(t-d_2) (\Lambda_b \otimes I_n) \bar{\delta}_v(t-d_2).$$

利用类似于定理 4.1 的证明方式, 即可得到所要结论. □

如下推论是定理 4.2 在 $d_1 = 0$ 情形下的直接结果.

推论 4.2 假定假设 2.1、2.2 和 3.2 成立, 且 $d_1 = 0$. 如果

$$k_1[(\bar{\sigma}_1^2 + \lambda_{Nb})(2 + k_1 \lambda_{Nb}) + \lambda_{1b}] < 2k_2[(1 - k_2 \bar{\sigma}_2^2)\lambda_{1b} - k_2 \lambda_{Nb}^2],$$

则领导者的二阶多自主体系统在分布式协议 (2.5) 下达到均方和几乎必然领导 - 跟随趋同.

5 仿真

考虑四个二阶自主体构成的系统, 其通信拓扑图为 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$, 其中 $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{E} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1), (2, 4), (4, 2)\}$, $\mathcal{A} = [a_{ij}]_{4 \times 4}$, $a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = a_{34} = a_{43} = a_{42} = a_{24} = 1$, 其他元素为 0. 容易计算 $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$, $\lambda_4 = 4$. 假设时延 $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, 初始值为 $x(t) = [-1, -6.5, -2, -5]^T$, $v(t) = [2.5, 2.2, -4, -5.2]^T$, $t = -2, -1, 0$. 另外, 噪音强度函数为 $f_{1ji}(x) = \sigma_{1ji}x = 1.5x$, $f_{2ji}(x) = \sigma_{2ji}x = 2.5x$, $i, j = 1, 2, 3, 4$. 根据定理 4.1 (或者注 4.1), 我们选取

$$0.011 = k_2 < k_2^* := \frac{\lambda_2}{(1 + 2d_1)\lambda_N^2 + \bar{\sigma}_2^2 \frac{N-1}{N} \lambda_2} \approx 0.019.$$

另外, 可以计算 $p_1 := 2k_2[(1 - k_2 \bar{\sigma}_2^2 \frac{N-1}{N})\lambda_2 - k_2 \lambda_N^2(1 + 2d_1)] = 0.0092$. 选取 $k_1 = 0.0003$, 则

$$p_2(k_1) := \left(\bar{\sigma}_1^2 \frac{N-1}{N} + \lambda_N(1 + 2d_1) \right) (2 + k_1(1 + d_1)^2 \lambda_N) + \lambda_2(1 + d_1) = 29.44.$$

容易得到 $0.0088 \approx k_1 p_2(k_1) < p_1$. 条件 (4.1) 成立, 即该二阶多自主体系统会达到均方和几乎必然趋同. 针对几乎必然趋同的仿真, 我们考虑一条样本的轨道, 仿真见图 1. 该图同时反映了速度分量达到了几乎必然强趋同. 为了得到均方趋同的仿真, 我们考虑 $\{x_i(t) - x_1(t)\}_{i=2,3,4}$ 的均方渐近行为. 取 7×10^3 个随机的样本, 并取均方平均, 可得均方趋同的仿真, 见图 2.

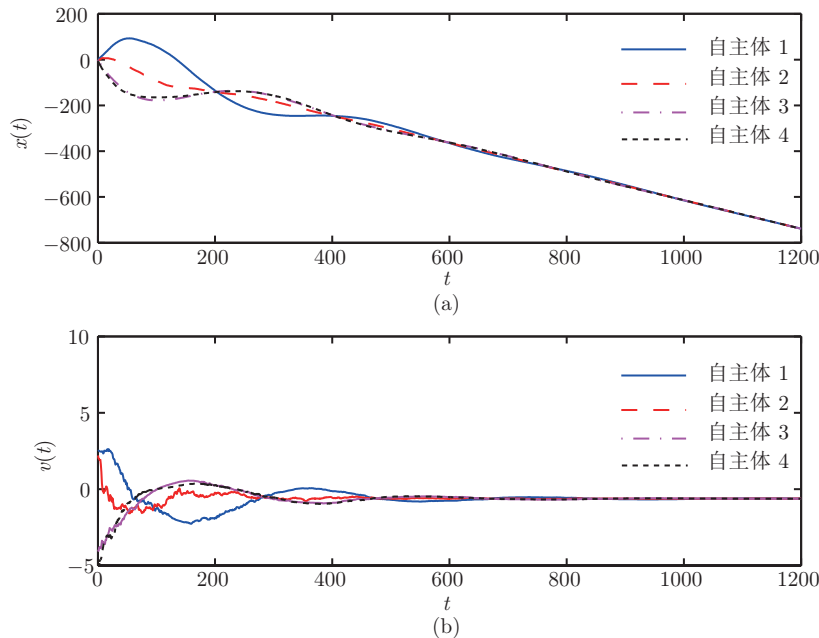
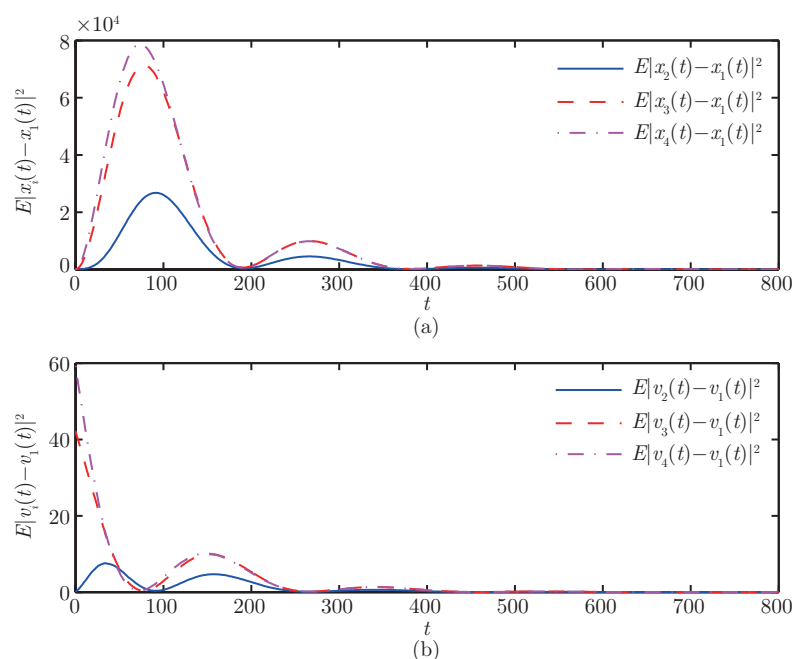


图 1 几乎必然趋同仿真: $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $k_1 = 3 \times 10^{-4}$, $k_2 = 0.011$

图 2 均方趋同仿真: $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $k_1 = 3 \times 10^{-4}$, $k_2 = 0.011$

6 总结与展望

本文基于离散时间系统的随机稳定性理论, 研究了带有乘性噪声和时延的离散时间多自主体系统的随机趋同控制, 揭示了控制增益的选取与时延、噪声强度系数以及网络拓扑的依赖关系. 这里建立的关于离散时间随机时延方程的随机指数稳定性准则是研究趋同控制问题的前提. 在未来的工作中, 我们将进一步发展随机稳定性理论, 应用于复杂但更切合实际的网络系统的协调控制. 这些复杂的网络系统包括带有各种时延 (如文献 [4–6] 中的时延) 和量测噪声的二阶多自主体系统、位移量测和速度量测带有不同时延和量测噪声的二阶多自主体系统, 以及带有不同时延和量测噪声的一般线性多自主体系统等.

致谢 感谢匿名审稿人的认真阅读及对本文提出的宝贵意见和建议.

参考文献

- 1 Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Trans Automat Control*, 2004, 49: 1520–1533
- 2 Olfati-Saber R, Fax J A, Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *IEEE*, 2007, 95: 215–233
- 3 Moreau L. Stability of continuous-time distributed consensus algorithms. In: *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Atlantis, Paradise Island: IEEE, 2004, 3998–4003
- 4 Bliman P A, Ferrari-Trecate G. Average consensus problems in networks of agents with delayed communications. *Automatica*, 2008, 44: 1985–1995
- 5 Papachristodoulou A, Jadbabaie A, Münz U. Effects of delay in multi-agent consensus and oscillator synchronization. *IEEE Trans Automat Control*, 2010, 55: 1471–1477

- 6 Münz U, Papachristodoulou A, Allgöwer F. Delay robustness in non-identical multi-agent systems. *IEEE Trans Automat Control*, 2012, 57: 1597–1603
- 7 Yu W W, Chen G R, Cao M. Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems. *Automatica*, 2010, 46: 1089–1095
- 8 Zhu W, Cheng D Z. Leader-following consensus of second-order agents with multiple time-varying delays. *Automatica*, 2010, 46: 1994–1999
- 9 Tian Y P, Liu C L. Consensus of multi-agent systems with diverse input and communication delays. *IEEE Trans Automat Control*, 2008, 53: 2122–2128
- 10 Huang M, Manton J H. Coordination and consensus of networked agents with noisy measurements: Stochastic algorithms and asymptotic behavior. *SIAM J Control Optim*, 2009, 48: 134–161
- 11 Kar S, Moura J M F. Distributed consensus algorithms in sensor networks with imperfect communication: Link failures and channel noise. *IEEE Trans Signal Process*, 2009, 57: 355–369
- 12 Li T, Zhang J F. Consensus conditions of multi-agent systems with time-varying topologies and stochastic communication noises. *IEEE Trans Automat Control*, 2010, 55: 2043–2057
- 13 Huang M, Li T, Zhang J F. Stochastic approximation based consensus dynamics over Markovian networks. *SIAM J Control Optim*, 2015, 53: 3339–3363
- 14 Li T, Zhang J F. Mean square average-consensus under measurement noises and fixed topologies: Necessary and sufficient conditions. *Automatica*, 2009, 45: 1929–1936
- 15 Zong X, Li T, Zhang J F. Consensus conditions for continuous-time multi-agent systems with additive and multiplicative measurement noises. [Http://lsc.amss.ac.cn/~jif/paper/\[J118\].pdf](http://lsc.amss.ac.cn/~jif/paper/[J118].pdf), 2016
- 16 Aysal T C, Barner K E. Convergence of consensus models with stochastic disturbances. *IEEE Trans Inform Theory*, 2010, 56: 4101–4113
- 17 Medvedev G S. Stochastic stability of continuous time consensus protocols. *SIAM J Control Optim*, 2012, 50: 1859–1885
- 18 Wang Y, Cheng L, Hou Z G, et al. Containment control of multi-agent systems in a noisy communication environment. *Automatica*, 2014, 50: 1922–1928
- 19 Cheng L, Hou Z G, Tan M, et al. Necessary and sufficient conditions for consensus of double-integrator multi-agent systems with measurement noises. *IEEE Trans Automat Control*, 2011, 56: 1958–1963
- 20 Liu J, Liu X, Xie W C, et al. Stochastic consensus seeking with communication delays. *Automatica*, 2011, 47: 2689–2696
- 21 Zong X, Li T, Zhang J F. Consensus conditions for continuous-time multi-agent systems with time-delays and measurement noises. [ArXiv:1602.00069](https://arxiv.org/abs/1602.00069), 2015
- 22 Tuzlukov V. *Signal Processing Noise*. Boca Raton: CRC Press, 2002
- 23 Zong X, Wu F, Yin G, et al. Almost sure and pth-moment stability and stabilization of regime-switching jump diffusion systems. *SIAM J Control Optim*, 2014, 52: 2595–2622
- 24 Huang L, Hjalmarsson H, Koepl H. Almost sure stability and stabilization of discrete-time stochastic systems. *Systems Control Lett*, 2015, 82: 26–32
- 25 Ni Y H, Li X. Consensus seeking in multi-agent systems with multiplicative measurement noises. *Systems Control Lett*, 2013, 62: 430–437
- 26 Li T, Wu F, Zhang J F. Multi-agent consensus with relative-state-dependent measurement noises. *IEEE Trans Automat Control*, 2014, 59: 2463–2468
- 27 Patterson S, Bamieh B, Abbadi A E. Convergence rates of distributed average consensus with stochastic link failures. *IEEE Trans Automat Control*, 2010, 55: 880–892
- 28 Wang J, Elia N. Mitigation of complex behavior over networked systems: Analysis of spatially invariant structures. *Automatica*, 2013, 49: 1626–1638
- 29 Long Y, Liu S, Xie L. Distributed consensus of discrete-time multi-agent systems with multiplicative noises. *Internat J Robust Nonlinear Control*, 2015, 25: 3113–3131
- 30 Wang Z, Liu Y, Wei G, et al. A note on control of a class of discrete-time stochastic systems with distributed delays and nonlinear disturbances. *Automatica*, 2010, 46: 543–548
- 31 He X Z. Degenerate Lyapunov functionals of a well-known prey-predator model with discrete delays. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 1999, 129: 755–771
- 32 Huang M, Dey S, Nair G N, et al. Stochastic consensus over noisy networks with Markovian and arbitrary switches. *Automatica*, 2010, 46: 1571–1583
- 33 Ash R B. *Real Analysis and Probability*. New York: Academic Press, 1972

- 34 Ma C, Li T, Zhang J F. Consensus control for leader-following multi-agent systems with measurement noises. *J Syst Sci Complex*, 2010, 23: 35–49
- 35 Wu F, Mao X, Kloeden P E. Discrete Razumikhin-type technique and stability of the Euler-Maruyama method to stochastic functional differential equations. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2013, 33: 885–903

附录 A

定理 2.1 的证明 令 $z(t) = y(t) + \sum_{j=t-d_1}^{t-1} A_1 y(j)$, 则易知

$$z(t+1) = z(t) + Ay(t) + M(t), \quad (\text{A.1})$$

其中 $A = A_0 + A_1$. 选取退化的 Lyapunov 泛函

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t),$$

其中 $V_1(t) = z^T(t)Pz(t)$, $V_2(t) = \sum_{s=-d_1}^{-1} \sum_{j=t+s}^{t-1} y(j)^T A_1^T P A_1 y(j)$. 利用 (A.1) 可知,

$$\begin{aligned} V_1(t+1) &= z^T(t)Pz(t) + y^T(t)[A^T P + PA + A^T P A]y(t) \\ &\quad + 2y^T(t)A^T P \sum_{j=t-d_1}^{t-1} A_1 y(j) + M^T(t)PM(t) + M_1(t), \end{aligned}$$

其中 $M_1(t) = 2(z(t) + Ay(t))^T M(t)$. 注意到

$$\left(\sum_{j=t-d_1}^{t-1} A_1 y(j) \right)^T P \left(\sum_{j=t-d_1}^{t-1} A_1 y(j) \right) \leq d_1 \sum_{j=t-d_1}^{t-1} y(j)^T A_1^T P A_1 y(j).$$

利用基本不等式 $2x^T y \leq \varepsilon \|x\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|y\|^2$, $\varepsilon > 0$, 我们得到

$$\begin{aligned} 2y^T(t)A^T P \sum_{j=t-d_1}^{t-1} A_1 y(j) &\leq d_1 y^T(t)A^T P A y(t) + \frac{1}{d_1} \left(\sum_{j=t-d_1}^{t-1} A_1 y(j) \right)^T P \left(\sum_{j=t-d_1}^{t-1} A_1 y(j) \right) \\ &\leq d_1 y^T(t)A^T P A y(t) + \sum_{j=t-d_1}^{t-1} y(j)^T A_1^T P A_1 y(j). \end{aligned}$$

而针对 $V_2(t)$, 我们有

$$V_2(t+1) = V_2(t) + d_1 y^T(t)A_1^T P A_1 y(t) - \sum_{j=t-d_1}^{t-1} y(j)^T A_1^T P A_1 y(j).$$

综合上述估计, 我们有

$$V(t+1) \leq V(t) + y^T(t)P_1 y(t) + M^T(t)PM(t) + M_1(t),$$

其中 $P_1 = A^T P + PA + A^T P A(1 + d_1) + A_1^T P A_1 d_1$. 利用 $\mathbb{E}M_1(t) = 0$ 和 (2.7), 可得

$$\mathbb{E}V(t+1) \leq \mathbb{E}V(t) + \mathbb{E}y^T(t)P_1 y(t) + \mathbb{E}y^T(t-d_2)D_P y(t-d_2).$$

对任意常数 $S \geq 1$, 我们有

$$S^{t+1}\mathbb{E}V(t+1) - S^t\mathbb{E}V(t) \leq (S^{t+1} - S^t)\mathbb{E}V(t) + S^{t+1}\mathbb{E}y^T(t)P_1y(t) + S^{t+1}\mathbb{E}y^T(t-d_2)D_Py(t-d_2).$$

因而,

$$\begin{aligned} S^{t+1}\mathbb{E}V(t+1) &\leq \mathbb{E}V(0) + \sum_{s=0}^t (S^{s+1} - S^s)\mathbb{E}V(s) + \sum_{s=0}^t S^{s+1}\mathbb{E}y^T(s)P_1y(s) \\ &\quad + \sum_{s=0}^t S^{s+1}\mathbb{E}y^T(s-d_2)D_Py(s-d_2). \end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{s=0}^t S^{s+1}y^T(s-d_2)D_Py(s-d_2) \leq S^{d_2} \sum_{s=-d_2}^{-1} S^{s+1}y^T(s)D_Py(s) + S^{d_2} \sum_{s=0}^t S^{s+1}y^T(s)D_Py(s).$$

因此,

$$S^{t+1}\mathbb{E}V(t+1) \leq C_0(S) + \sum_{s=0}^t (S^{s+1} - S^s)\mathbb{E}V(s) + \sum_{s=0}^t S^{s+1}\mathbb{E}y^T(s)P_2(S)y(s), \tag{A.2}$$

其中 $C_0(S) = \mathbb{E}V(0) + S^{d_2}\mathbb{E}\sum_{s=-d_2}^{-1} y^T(s)D_Py(s)$, $P_2(S) = P_1 + S^{d_2}D_P$. 由 $V(t)$ 的定义可知,

$$\mathbb{E}V(t) \leq 2\|P\|\mathbb{E}\|y(t)\|^2 + 3d_1\|A_1\|^2\|P\| \sum_{j=t-d_1}^{t-1} \mathbb{E}\|y(j)\|^2.$$

将上式代入 (A.2) 得

$$\begin{aligned} S^{t+1}\mathbb{E}V(t+1) &\leq C_0(S) + 2(1 - S^{-1})\|P\| \sum_{s=0}^t S^{s+1}\mathbb{E}\|y(s)\|^2 + \sum_{s=0}^t S^{s+1}\mathbb{E}y^T(s)P_2(S)y(s) \\ &\quad + 3d_1\|A_1\|^2\|P\|(1 - S^{-1}) \sum_{s=0}^t S^{s+1} \sum_{j=s-d_1}^{s-1} \mathbb{E}\|y(j)\|^2. \end{aligned} \tag{A.3}$$

注意到

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^t S^{s+1} \sum_{j=s-d_1}^{s-1} \mathbb{E}\|y(j)\|^2 &\leq \sum_{j=-d_1}^{-1} \mathbb{E}\|y(j)\|^2 \sum_{s=0}^{j+d_1} S^{s+1} + \sum_{j=0}^{t-1} \mathbb{E}\|y(j)\|^2 \sum_{s=j+1}^{j+d_1} S^{s+1} \\ &\leq d_1 S^{d_1} \sum_{j=-d_1}^{-1} \mathbb{E}\|y(j)\|^2 + d_1 S^{d_1} \sum_{j=0}^{t-1} S^{j+1} \mathbb{E}\|y(j)\|^2. \end{aligned}$$

将上式代入 (A.3) 即得

$$S^{t+1}\mathbb{E}V(t+1) \leq C_1(S) + C_2(S)(1 - S^{-1}) \sum_{s=0}^t S^{s+1}\mathbb{E}\|y(s)\|^2 + \sum_{s=0}^t S^{s+1}\mathbb{E}y^T(s)P_2(S)y(s), \tag{A.4}$$

其中 $C_1(S) = C_0(S) + 3d_1^2\|A_1\|^2\|P\|S^{d_1} \sum_{j=-d_1}^{-1} \mathbb{E}\|y(j)\|^2$, $C_2(S) = 2\|P\| + 3d_1^2\|A_1\|^2\|P\|S^{d_1}$. 根据定理中 Π_P 的定义, 易知

$$P_2(S) = \Pi_P + (S^{d_2} - 1)D_P \leq -\lambda_{\min}(-\Pi_P)I_m + (S^{d_2} - 1)\|D_P\|I_m,$$

这里假定方程 (2.6) 是 m 维的. 令 $H(S) = C_2(S)(1 - S^{-1}) - \lambda_{\min}(-\Pi_P) + (S^{d_2} - 1)\|D_P\|$, 则由 (A.4) 可知,

$$S^{t+1}\mathbb{E}V(t+1) \leq C_1(S) + H(S) \sum_{j=0}^t S^{j+1} \mathbb{E}\|y(j)\|^2. \quad (\text{A.5})$$

由条件 (2.8), 容易看出 $H(1) < 0$, 并且对 $S > 1$, $C_2(S)(1 - S^{-1}) > 0$, 从而, $H(S) \geq -\lambda_{\min}(-\Pi_P) + (S^{d_2} - 1)\|D_P\|$, 且当 $S > S_0 := (\frac{\lambda_{\min}(-\Pi_P) + \|D_P\|}{\|D_P\|})^{\frac{1}{d_2}}$ 时, $H(S) > 0$. 易知 $H(S)$ 的导数 $H'(S) > 0$, 即 $H(S)$ 是递增的. 因此, 由 $H(S)$ 的连续性知, 必然存在唯一的 $\bar{S} \in (1, S_0)$ 使得 $H(\bar{S}) = 0$, 而对任意 $S^* \in (1, \bar{S})$ 都有 $H(S^*) < 0$. 在不等式 (A.5) 中取 $S = S^*$ 立即得

$$S^{*t+1}\mathbb{E}V(t+1) \leq C_1(S^*) + H(S^*) \sum_{s=0}^t S^{*s+1} \mathbb{E}\|y(s)\|^2,$$

这意味着

$$-H(S^*) \sum_{s=0}^{\infty} S^{*s+1} \mathbb{E}\|y(s)\|^2 \leq C_1(S^*). \quad (\text{A.6})$$

选取 $\gamma > 0$ 使得 $S^* = e^\gamma$. 从而由 (A.6) 知, 存在常数 $C_3 > 0$ 使得

$$e^{\gamma t} \mathbb{E}\|y(t)\|^2 \leq C_3.$$

再根据离散时间随机系统矩指数稳定与几乎必然稳定之间的关系 (参见文献 [35]), 可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|y(t)\| < -\frac{\gamma}{2}, \quad \text{a.s.}$$

证毕. □

Consensus control of discrete-time multi-agent systems with time-delays and multiplicative measurement noises

ZONG XiaoFeng, LI Tao & ZHANG JiFeng

Abstract This work is concerned with stochastic consensus conditions of discrete-time multi-agent systems with time-delays and multiplicative measurement noises. By the algebraic graph theory and the matrix theory, the stochastic consensus problem is converted into the stochastic stability problem of discrete-time stochastic delayed systems driven by multiplicative noises. Then by establishing the stochastic stability criteria for discrete-time stochastic delayed systems, the stochastic consensus conditions are deduced. For the case with first-order dynamics, the sufficient conditions for the mean square and the almost sure strong consensus are deduced under balanced digraphs. For the case with second-order dynamics, the consensus analysis is given under undirected graphs, and it is proved that for any given bounded time-delay and noise intensity, the stochastic weak consensus for the position and stochastic strong consensus for the velocity can be achieved by carefully choosing the control gains. These consensus results are further extended to the leader-following case.

Keywords multi-agent system, time-delay, multiplicative measurement noise, consensus

MSC(2010) 60H30, 93E03, 93E15, 93C85

doi: 10.1360/N012015-00398