系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
30(5) (2010, 5), 695–702

正实数维分形集的构造方法*

齐洪胜 袁艳艳 程代展

(中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所，北京 100190)

摘要 给出了测量一类分形集维数的简单方法. 根据这种测量方法，可以构造出任意实数维分形集，并且分形集可以不是自相似的.

关键词 分形集，自相似集， Hausdorff 维数.

MR(2000) 主题分类号 91B30

1 引 言

在当代复杂性科学中分形集起着重要作用. 分形集可由自组织过程生成 [1,2]. 分形集的一个基本特征是它的分形维数. Hausdorff 测度常用于测量分形集维数. 我们首先回顾一些分形集的典型例子.

例 1 (康托集) 考虑 $C_1=[0,1]$. 去掉它中间的 $\frac{1}{3}$, 我们有

$$C_2=\left[0,\frac{1}{3}\right]\bigcup\left[\frac{2}{3},1\right];$$

同样将剩下两段的中间 $\frac{1}{3}$ 去掉，我们有

$$C_3=\left[0,\frac{1}{9}\right]\bigcup\left[\frac{2}{9},\ \frac{1}{3}\right]\bigcup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\bigcup\left[\frac{8}{9},1\right].$$

重复这个过程，我们有 C_i, $i=2,3,\cdots$. 令

$$C:=\bigcap_{i=1}^{\infty}C_i,$$

C 就称为康托集 (见图 1). 它是一种最简单的自相似集合.

* 国家自然科学基金 (60221301, 60334040) 资助课题.
收稿日期：2007-12-13, 收到修改稿日期：2009-05-14.

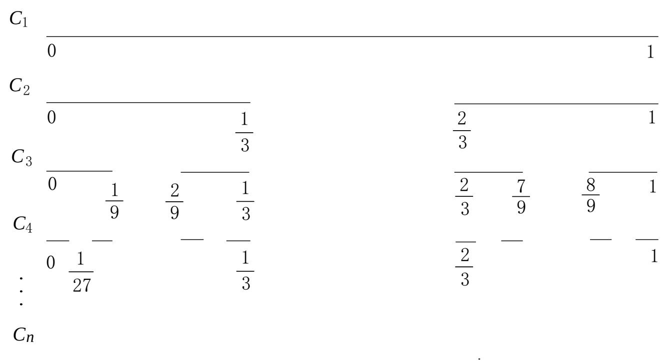

图 1 康托集

众所周知，康托集的测度是 0. 因此，很自然地我们猜测它的维数小于 1.

例 2 (Koch 曲线) 一条线段，中间 $\frac{1}{3}$ 用等边三角形的两边代替，得到一个 4 条边的折线. 然后对 4 条边作同样的替代，就得到一个 16 条边的折线. 重复这个过程，我们最后得到的折线就是 Koch 曲线 (见图 2).

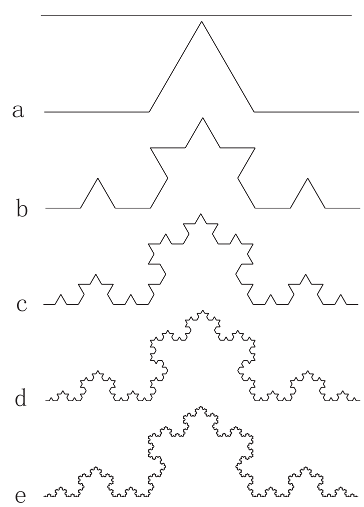

图 2 Koch 曲线

例 3 (雪花 [3]) 图 3 给出了两种刻画雪花的方法. (a) 将 5 个小单元叠加到一起组成一个新图形，然后将 5 个新图形再叠加，这样重复这个过程，就得到一个雪花图案. (b) 将一个方块 9 等分，去除各边中间的 4 块. 然后对剩下的 5 小块作同样的操作，一直下去也可以得到雪花.

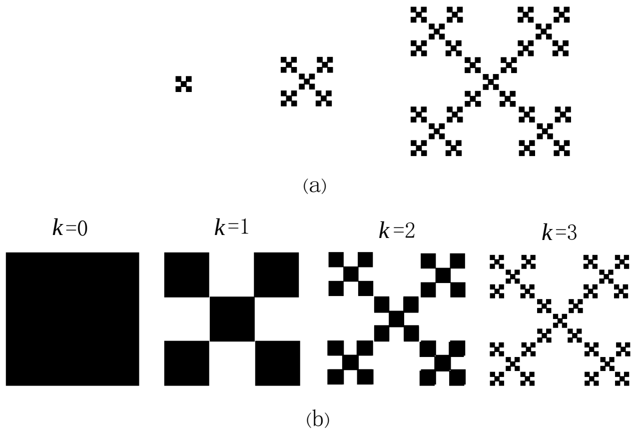

图 3 雪花

康托集、 Koch 曲线和雪花是自相似图形中的几个著名例子．据我们所知，大多数自相似图形都具有较低的维数，但是仅有少数图形可以精确地计算出维数，例如上面的几个例子，这些例子被分形的有关论著反复引用．自然地我们要问这样的问题：有任意维数的自相似形体吗？如果有，它们是什么样子？本文的目的就是为了回答这个问题．对于任意给定的 $r>0$, 我们都可以构造出一个自相似集 F, 且 $\dim(F)=r$.

2 Hausdorff 维数

本节回顾关于 Hausdorff 维数的一些基本概念．更多内容可参考 [4].

设 $F\subset\mathbb{R}^n$, $0\le s\le n$. 对于 $0<\delta<1$, 令

$$H_\delta^s(F)=\inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s\Big|\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i\supset F,\ |U_i|\le\delta\Big\},\tag{1}$$

注意这里 $|U|$ 表示集合 U 的直径，其定义为

$$|U|=\sup\{\|x-y\|\mid x,y\in U\}.\tag{2}$$

如果固定 s, 则由于 δ 越小，容许的集合越少，于是下极限越大．根据单调性，可定义

$$H^s(F)=\lim_{\delta\to0}H_\delta^s(F).$$

定义 4　式 (2) 中定义的 $H^s(F)$ 称为 F 的 Hausdorff 维数.

如果 $\{F_i\,|\,i=1,2,\cdots\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组可数的不相交的 Borel 集，那么有

$$H^s\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}H^s(F_i).\tag{3}$$

这说明 H^s 是一个测度，并且与 Lebesgue 测度一样， Borel 集是其可测集.

命题 5 (比例性质) 设 $F \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$, 并记

$$\lambda F := \{\lambda x \mid x \in F\}.$$

则

$$H^s(\lambda F) = \lambda^s H^s(F). \tag{4}$$

如果 F 是 $\mathbb{R}^k$ 中的可测集, 那么 F 的 k 维 Hausdorff 测度 $H^k(F)$ 与它的 Lebesgue 测度一致 (严格地说, 差一个与 F 无关的正常数[5]) . 因此, Hausdorff 测度可以看作是 Lebesgue 测度的一个推广.

介绍 Hausdorff 测度的主要目的是用它来测量一个形体的维数. 令

$$t > s, \quad F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad |U_i| < \delta,$$

则

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t = \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s |U_i|^{t-s} \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s.$$

因此, 用 Hausdorff 测度测量一个形体 F 时, 其值如图 4 所示. 当 s 小于某个临界值时, 测量值为 ∞; 当 s 大于这个临界值时, 测量值为 0; 当 s 等于这个临界值时, 测量值可能有不同情况. 这个临界值就称为 F 的 Hausdorff 维数.

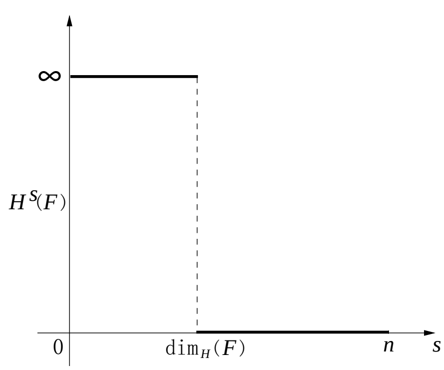

图 4 Hausdorff 维数

利用 Hausdorff 测度的定义直接判定维数是比较困难的. 在工程问题中可通过计算机利用数值方法求它.

对于自相似形体, 命题 5 给出了一个很方便的计算方法. 为形象起见, 我们见图 5. 考虑线段 ab, 当将它的长度加倍时, 则生成 2 个相同的线段. 对于正方形 ABCD, 将它的边长增加一倍时, 会生成 4 个相同的正方形. 再看立方体 ABCDEFGH, 当它的边长加倍时, 将生成 8 个相同的立方体. 记 K 为线度放大的倍数, N 为形体复制出自身的份数, 那么下面的公式就是 (4) 的一个直接结果

$$\dim(F) = \frac{\ln(N)}{\ln(K)}. \tag{5}$$

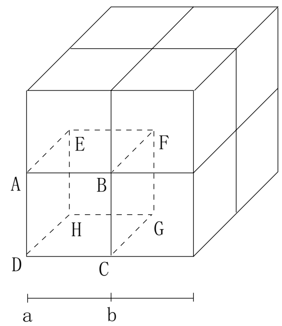

图 5 形体边长增长与维数

将式 (5) 应用于自相似图形，很容易算出其维数.

例 6

1) 考虑康托集 C. 如果我们将线度放大 3 倍，就得到两份原来的康托集. 因此，康托集的维数是

$$\dim(C) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 0.63093.$$

2) 考虑 Koch 曲线 K. 如果我们将线度放大 3 倍，就得到 4 份原来的 Koch 曲线. 因此， Koch 曲线的维数是

$$\dim(K) = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1.26186.$$

3) 考虑雪花 S. 如果将线度放大 3 倍，就得到 5 份原来的雪花图案. 因此，雪花的维数是

$$\dim(S) = \frac{\ln(5)}{\ln(3)} \approx 1.46497.$$

3 有理数维数的分形集

对于任意一个给定的有理数 $r = \frac{m}{n} > 0$ 我们都可以构造出一个自相似集 F, 且 $\dim(F) = r$.

首先，我们考虑 $r = \frac{\ln(m)}{\ln(n)}$, 其中 $m, n \in \mathbb{N}$ 是自然数. 不失一般性，我们假设 $r \notin \mathbb{N}$, 否则就是大家熟悉的整数维情形.

情形 1 $r < 1$. 在这种情形下，我们可以选择线段 $[0, 1]$. 将它均分成 n 份，去掉 $n - m$ 份保留 m 份，对保留的 m 份重复这个过程，一直做下去，最后我们得到一个维数为 $\frac{\ln(m)}{\ln(n)}$ 的自相似集.

例 7 构造一个维数 $r = 0.5$ 的分形集 $F_{0.5}$. 由于 $r = \frac{\ln(2)}{\ln(4)}$, 我们可以将 $[0, 1]$ 均分成 4 份并去掉其中的 2 份，然后对于剩下的 2 份重复这个过程，不停地做下去，最后我们就得到了 $F_{0.5}$ (见图 6).

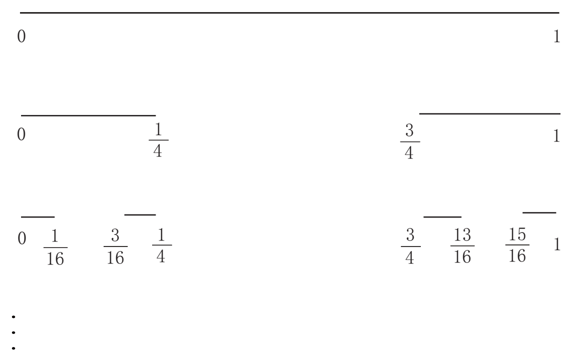

图 6 维数为 0.5 的分形集的构造

注 1 1) 容易看出上面构造的 $F_{0.5}$ 可以表示成

$$F_{0.5}=\left\{\frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{4^2}+\frac{x_3}{4^3}+\cdots\,\middle|\, x_i\in\{0,3\}\right\}. \tag{6}$$

显然 $F_{0.5}$ 不是唯一的. 在式 (6) 中如果我们将集合 $\{0,3\}$ 替换为 $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ 或者 $\{2,3\}$, 那么就有另外 5 个 $F_{0.5}$ 了.

2) 如果选择

$$\begin{aligned}&x_{6k+1}\in\{0,1\},\quad x_{6k+2}\in\{0,2\},\quad x_{6k+3}\in\{0,3\}\\&x_{6k+4}\in\{1,2\},\quad x_{6k+5}\in\{1,3\},\quad x_{6k+6}\in\{2,3\},\quad k=0,1,\cdots,\end{aligned}$$

我们可以构造出更复杂的自相似集.

3) 更有趣的是, 如果我们选择的集合不是周期性的, 可以构造出不自相似的分形集 $F_{0.5}$. 例如, $x_1\in\{0,3\}$, $x_2\in\{1,2\}$; $x_3\in\{0,3\}$, $x_4\in\{0,3\}$, $x_5\in\{1,2\}$ $x_6\in\{1,2\}$, 然后重复 $\{0,3\}$ 三次, 接着 $\{1,2\}$ 三次等等.

情形 2 $r=\frac{m}{n}>1$. 在这种情形下, 我们可以找一个 $k\in\mathbb{N}$, 使得

$$n^{k-1}<m<n^k.$$

注意这个不等式永远不能取等号, 因为 r 不是整数.

接着我们选择一个立方体 $[0,1]^k\subset\mathbb{R}^k$, 将它的边均分成 n 份, 这样我们就得到了 n^k 个小立方体, 从中选择任意的 m 个小立方体, 其余的去掉, 对这 m 个小立方体重复这样的过程, 一直继续下去, 我们就得到一个维数为 $\frac{\ln(m)}{\ln(n)}$ 的自相似集.

例 8 构造一个维数 $r=2.5$ 的分形集. 我们可以将 r 表示为

$$r=\frac{\ln(2^5)}{\ln(2^2)},$$

即 $m=32$, $n=4$. 从而 $k=3$. 然后我们可以按如下方式构造 $F_{2.5}$: 首先, 通过将每条边均分成 4 份将一个立方均分成 64 个小立方, 并去掉其中的 32 个小立方, 如图 7 所示. 然后对剩下的 32 个小立方重复前面的过程, 于是得到 32^2 个小小立方. 一直做下去, 最后我们就得到维数为 2.5 的分形集.

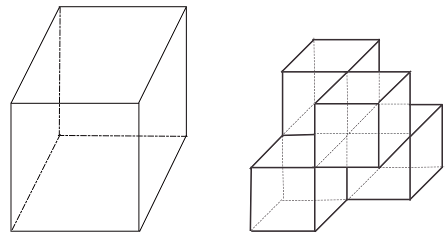

图 7 维数为 2.5 的分形集的构造

根据上面的例子可以断言对于任意的正有理数 $r \in \mathbb{Q}_+$, 利用上述过程都可以构造出维数为 r 的分形集. 事实上，如果式 (7) 成立，则断言显然成立.

$$\mathbb{Q}_+ \subset \left\{ \frac{\ln(m)}{\ln(n)} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{7}$$

实际上，由

$$\frac{p}{q} = \frac{\ln(n^p)}{\ln(n^q)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

可知 (7) 成立.

为了简单起见，我们可以选取 $n = 2$.

4 实数维的分形集

情形 1 $r < 1$. 我们可以找到 $m, n \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\ln(m-1)}{\ln(n)} < r < \frac{\ln(m)}{\ln(n)} \leq 1.$$

选择线段 $[0,1]$, 我们可以将它均分成 n 份. 现在如果我们想让 $r = \frac{\ln(s)}{\ln(n)}$, 那么 $s = \mathrm{e}^{r\ln(n)} = n^r$, 且 $m-1 < s < m$. 因此我们可以先选取 m 份. 然后对于某一份，例如最后一份，将它缩小到 $n^r - (m-1)$.

再对每一份重复上面的过程，一直不停地做下去，我们最后就得到维数为 r 的自相似集.

情形 2 $r > 1$. 我们可以找到

$$\frac{\ln(m-1)}{\ln(n)} < r < \frac{\ln(m)}{\ln(n)}, \quad 且\ n^{k-1} < m \leq n^k.$$

选择一个立方体 $[0,1]^K \subset \mathbb{R}^k$, 我们将它的每条边都均分成 n 份，这样就得到 n^k 个小立方体. 与情形 1 类似，我们可以通过将其边缩小为 $\sqrt[k]{n^r - (m-1)}$ 来缩小最后一个立方体. 然后对每一个小立方体重复这个过程，一直做下去我们就得到维数为 r 的自相似集.

例 9 构造一个维数为 $\sqrt{2}$ 的分形集. 由于 $r = \frac{\ln(2^{\sqrt{2}})}{\ln 2}$, $s = 2^{\sqrt{2}} \approx 2.6651$. 于是 $m = 3$, 且

$$\mu := \sqrt{2^{\sqrt{2}} - (m-1)} \approx 0.8116.$$

为了构造 $F_{\sqrt{2}}$, 我们将一个正方形均分成 4 个小正方形. 首先取 $m-1=2$ 个小正方形, 再将第 3 个小正方形的边长都缩小为原先长度的 μ 倍 (见图 8). 然后对两个正常的小正方形和一个缩小的小正方形重复前面的过程, 一直做下去我们最后就得到 $F_{\sqrt{2}}$.

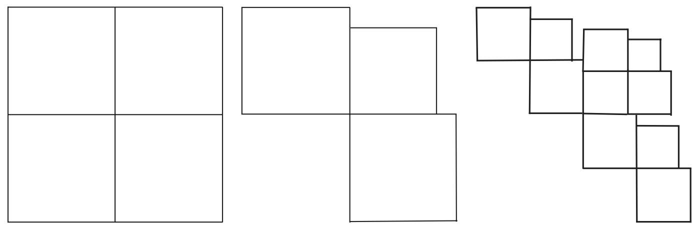

图 8 维数为 $\sqrt{2}$ 的分形集的构造

5 结 论

本文考虑了分形集和它的 Hausdorff 维数. 我们提供了构造任意正实数维分形的方法. 利用这种方法, 可以构造出任意维的新的分形集, 这大大扩充了我们对分形集的认识.

参 考 文 献

[1] Harte D. Multifractals. Australia: Capman and Hall/CRC Publisher, 2001.
[2] Nicolis G, Prigogine I. Self-Organization in Nonequilibrium Systems. New York: Wiley, 1977.
[3] 张济忠. 分形. 北京: 清华大学出版社, 1995.
[4] Falcomer K J. Dimesion — Their Determination and Properties, Fractal Geometry and Analysis. Dordrecht: Kluwer Publisher, 1991.
[5] Falcomer K J. The Geometry of Fractal Sets. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.

CONSTRUCTING FRACTAL SETS OF POSITIVE REAL DIMENSIONS

QI Hongsheng YUAN Yanyan CHENG Daizhan

(*Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and Systems Scicence, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190)

Abstract This paper gives a simple way to measure the dimensions of a class of fractal sets. Based on this measurement, it is shown that there exist bunch of fractal sets which are of the dimension of any given positive real number, and these sets may be not self-similar.

Key words Fractal set, self-similar set, Hausdorff dimension.