第 31 卷第 12 期
2014 年 12 月
控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications
Vol. 31 No. 12
Dec. 2014
DOI: 10.7641/CTA.2014.40777

逻辑系统的代数状态空间方法的基础、现状及其应用

程代展†, 齐洪胜
(中国科学院 数学与系统科学研究院 系统控制重点实验室, 北京 100190)

摘要: 逻辑系统指自变量只取有限个值的动态系统. 包括2值的经典逻辑(或布尔逻辑)、k值逻辑、(一般)有限值逻辑. 近年来, 利用矩阵半张量积发展起来的逻辑动态系统的代数状态空间方法得到长足的进展和普遍的重视. 同时, 它被广泛应用于许多工程问题或理论研究中. 它类似于$\mathbb{R}^n$上由微分或差分方程描述的动态系统的Kalman状态空间方法, 为逻辑系统的分析与控制设计提供了一个便捷的平台. 本文首先对该方法作一简要介绍, 然后, 对该新兴学科分支的现状作一评述. 最后, 详细介绍该方法目前的应用以及其更广泛的应用前景.

关键词: 矩阵半张量积; 逻辑动态系统; 代数状态空间方程; 纯状态与混合状态; 控制与博弈
中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Algebraic state space approach to logical dynamic systems and its applications

CHENG Dai-zhan†, QI Hong-sheng
(Key Laboratory of Systems and Control, Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: The logical dynamic system in this paper stands for the systems where the state variables can take only finite values. Particularly, when the number is 2 it is a classical logic (or Boolean logic); k-valued logic, and general finitely valued (general) logic. In recent years, using semi-tensor product of matrices the algebraic state space approach to logical dynamic systems has been developed and widely appreciated. It has been used to many engineering problems and to theoretical researches. Parallel to the Kalman state space approach to continuous state space dynamics where the differential equations or difference equations are used to describe the dynamic systems, the algebraic state space approach may provide a convenient platform for analyzing and control design of logical systems. The purpose of this paper is two fold: First, we give a brief survey on this new approach; then we introduce its current research topics and main results. Finally many applications and predict the potential of its further applications are presented.

Key words: semi-tensor product; logical dynamic systems; algebraic state space equation; pure state and mixed state; control and game

1 逻辑动态系统简介(Introduction to logical dynamic systems)

记$\mathcal{D}_k$, $k\geqslant 2$为势(个数)为k的有限集, 即$|\mathcal{D}_k|=k$. 为方便计, 记

$$\mathcal{D}_k=\{1,2,\cdots,k\}.$$

注意, 这里$i\in\mathcal{D}$只表示序号为i的元素, 或称状态, 它不包含量化的意义. 例如: 在k值逻辑中, $\mathcal{D}_k=\{0,\frac{1}{k-1},\cdots,\frac{k-2}{k-1},1\}$; 特别是在标准逻辑下, 有$\mathcal{D}:=\mathcal{D}_2=\{T,F\}$或$\mathcal{D}=\{0,1\}$, 这里: “$T$”或“1”代表“真”, “$F$”或“0”代表“假”. 在“石头–剪刀–布”游戏中, $\mathcal{D}_3=\{1,2,3\}$为策略集, 辟如, “1”代表石头、“2”代表剪刀、“3”代表布.

定义 1　1) 一个映射$f:\prod_{i=1}^{n}\mathcal{D}_{k_i}\to\mathcal{D}_{k_0}$称为一个有限值逻辑函数(或有限值逻辑映射). 它可表示为

$$y=f(x_1,\cdots,x_n),\tag{1}$$

这里: $y\in\mathcal{D}_{k_0}$, $x_i\in\mathcal{D}_{k_i}$, $i=1,\cdots,n$.

2) 当$k_0=k_1=\cdots=k_n=r$时, f称为r值逻辑函数. 当$r=2$时, 它称为布尔函数.

3) 一个映射$f:\prod_{i=1}^{n}\mathcal{D}_{k_i}\to\mathbb{R}$称为一个伪有限值逻辑函数(或伪有限值逻辑映射). 它也可以用式(1)表示. 当$k_1=k_2=\cdots=k_n=r$时, f称为伪r值逻辑函数. 当$r=2$时, 它称为伪布尔函数.

4) 动态系统

$$\begin{cases}x_1(t+1)=f_1(x_1(t),\cdots,x_n(t)),\\ x_2(t+1)=f_2(x_1(t),\cdots,x_n(t)),\\ \quad\vdots\\ x_n(t+1)=f_n(x_1(t),\cdots,x_n(t))\end{cases}\tag{2}$$

收稿日期: 2014−08−23; 录用日期: 2014−11−02.
†通信作者. E-mail: dcheng@iss.ac.cn; Tel.: +86 10-62651445.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61273013, 61333001, 61104065).

称为一个有限值逻辑动态系统, 这里$x_i(t) \in \mathcal{D}_{k_i}$, f_i为相应的逻辑函数, $i = 1, \cdots, n$. 当$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = r$时, 式(2)称为一个$r$值逻辑动态系统. 当$r = 2$时, 它称为一个布尔网络.

与经典控制理论类似, 如果状态方程中有控制, 同时加上输出方程, 则得到如下有限值逻辑控制系统:

$$
\begin{cases}
x_1(t+1) = \\
f_1(x_1(t), \cdots, x_n(t), u_1(t), \cdots, u_m(t)), \\
x_2(t+1) = \\
f_2(x_1(t), \cdots, x_n(t), u_1(t), \cdots, u_m(t)), \\
\quad \vdots \\
x_n(t+1) = \\
f_n(x_1(t), \cdots, x_n(t), u_1(t), \cdots, u_m(t)), \\
y_j(t) = h_j(x_1(t), \cdots, x_n(t)),\ j = 1, \cdots, p,
\end{cases} \tag{3}
$$

这里: $x_i(t) \in \mathcal{D}_{k_i} (i = 1, \cdots, n)$为状态变量, $u_i(t) \in \mathcal{D}_{r_i} (i = 1, \cdots, m)$为控制变量, $y_i(t) \in \mathcal{D}_{s_i} (i = 1, \cdots, l)$为输出变量, f_i, h_j为相应的逻辑函数.

自然界中的演化过程大致可以分为两类. 一类系统的状态在$\mathbb{R}^n$(或其他距离空间)中连续变化, 例如, 天体的运行、机械运动或机器人行走等. 这些过程可以用微分方程或差分方程进行描述, 从而可应用大量现成数学工具进行建模、分析或控制设计等. 另一类是逻辑型的, 例如, 下棋打扑克、军事对抗中的决策、布尔网络演化等. 定义1就是对这类对象的概括. 对付它们, 目前还缺乏有效的工具. 我们希望发展逻辑系统的代数状态空间方法, 以解决此类系统的建模、分析与优化控制等问题.

代数状态空间方法最初是由研究布尔网络而产生的. 在两位诺贝尔奖获得者Jacob和Monod发现细胞中某些基因具有调控网络的功能后, S. A. Kauffman于1969年提出用布尔网络刻画细胞与基因调控网络[1–2]. 由于它较好地刻画了细胞及基因调控的动力学行为, 布尔网络成为系统生物学研究的一个重要工具[3–4]. 但是, 由于缺乏有效的数学工具, 此后一段时间, 研究多以个案为主, 缺少一般性结果. 以讨论布尔网络极限环为例, 文章很多, 如文献[5–8]等. 但它们都只针对个别或一类系统. 而笔者用代数状态空间方法给出了一般理论[9]. 它仅涵盖了所有相对计算结果, 而且指出了前述工作中的若干错误. 最近, IEEE控制系统学会(CSS)当选主席、意大利教授M. E. Valcher在他们的相关论文[10]中指出: “程代展和他的合作者发展了一套代数框架来处理布尔网络与布尔控制网络, 结果形成了专著, 那里讨论了稳定性、镇定、能控性、解耦与最优控制等. 同时, 他们的工作激发了这一领域瞄准更深刻控制问题的进一步研究. ······这种代数方法使得基于逻辑的动态系统转化为代数问题, 使得处理线性状态空间的标准数学工具得以应用. 本文正是采用这种研究方法······”.

为了使用矩阵工具, 将$\mathcal{D}_k$中的元素用向量表示, 即

$$
i \sim \delta_k^i,\ i = 1, \cdots, k, \tag{4}
$$

这里δ_k^i是单位阵I_k的第i列. 记$\Delta_k := \mathrm{Col}(I_k)$, 即为$I_k$的列的集合. 那么, 在等价形式(4)之下, $\mathcal{D}_k \sim \Delta_k$, 即有限集$\mathcal{D}_k$可用向量积$\Delta_k$代替了.

在讨论逻辑动态系统时, 不可避免地会遇到“不确定”的情况. 例如, 在考虑经典逻辑时, 可能会有模糊的情况. 在模糊逻辑中, 一个变量隶属于命题A的程度(隶属度)μ可以是“0”与“1”之间的任何数. 在博弈中, 可以采用混合策略. 即如果玩家i的策略集为$S_i = \mathcal{D}_k$. 他可能以$r_i \geqslant 0$的概率取策略这种策略称为混合策略, 记为$(r_1, r_2, \cdots, r_k)^{\mathrm{T}}$($r_i \geqslant 0$, $\forall i$, 且$\sum_{i=1}^{k} r_i = 1$). 用

$$
\Upsilon_k := \{(r_1, \cdots, r_k)^{\mathrm{T}} \mid r_i \geqslant 0,\ \forall i;\ \sum_{i=1}^{k} r_i = 1\}
$$

表示概率分布集合. 考虑函数(1)或逻辑系统(2). 当$x_i \in \Upsilon_{k_i}$, $i = 1, \cdots, n$时, 称为混合状态, 相应的函数(系统) 称为混合值逻辑函数(系统). 根据混合值变量的表示法, 确定型变量的向量表示法(4)就变得十分自然且与混合值相容的了.

最后介绍两类矩阵:

• 逻辑矩阵: $L \in \mathcal{M}_{m \times n}$称为一个逻辑矩阵, 如果它的列均为$\delta_m^i$形式, 即$\mathrm{Col}(L) \subset \Delta_m$. $m \times n$维逻辑矩阵的集合记作$\mathcal{L}_{m \times n}$.

设$L \in \mathcal{L}_{m \times n}$, 则$L$可写成

$$
L = [\delta_m^{i_1}\ \ \delta_m^{i_2}\ \ \cdots\ \ \delta_m^{i_n}].
$$

为方便计, 将其简记为

$$
L = \delta_m[i_1\ \ i_2\ \ \cdots\ \ i_n].
$$

• 混合逻辑矩阵: $M \in \mathcal{M}_{m \times n}$称为一个混合逻辑矩阵, 如果$\mathrm{Col}(M) \subset \Upsilon_m$. $m \times n$维混合逻辑矩阵集合记作$\Upsilon_{m \times n}$.

2 矩阵的半张量积(Semi-tensor product of matrices)

本节的内容可参见文献[11–13].

定义 2　设$A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $B \in \mathcal{M}_{p \times q}$. 记$n$与$p$的最小公倍数为$t = \mathrm{lcm}\{n, p\}$. 定义$A$与$B$的半张量积为

$$
A \ltimes B := (A \otimes I_{t/n})(B \otimes I_{t/p}), \tag{5}
$$

这里$\otimes$是矩阵的Kronecker积[14].

如果$n = p$, 显然, 定义2退化为普通矩阵乘法. 因此, 半张量积是普通乘法的推广. 重要的是, 这种推广

保留了矩阵乘法的所有重要性质. 例如

命题 1 1) 分配律

$$\begin{cases} F \ltimes (aG \pm bH) = aF \ltimes G \pm bF \ltimes H, \\ (aF \pm bG) \ltimes H = \\ aF \ltimes H \pm bG \ltimes H,\ a, b \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{6}$$

2) 结合律

$$(F \ltimes G) \ltimes H = F \ltimes (G \ltimes H). \tag{7}$$

为进一步刻画和应用半张量积, 定义换位矩阵如下.

定义 3 换位矩阵$W_{[m,n]} \in \mathcal{M}_{mn\times mn}$定义如下:

$$\begin{aligned} W_{[m,n]} = \delta_{mn}[\ & 1, m+1, \cdots, (n-1)m+1, \\ & 2, m+2, \cdots, (n-1)m+2, \\ & \vdots \\ & m, 2m, \cdots, nm]. \end{aligned} \tag{8}$$

以下命题表明换位矩阵是正交阵.

命题 2

$$W_{[m,n]}^{\mathrm{T}} = W_{[m,n]}^{-1} = W_{[n,m]}. \tag{9}$$

它的主要作用是换位.

命题 3 1) 设有两列向量$X \in \mathbb{R}^m$, $Y \in \mathbb{R}^n$, 则

$$W_{[m,n]} \ltimes X \ltimes Y = Y \ltimes X. \tag{10}$$

2) 设有两行向量$X \in \mathbb{R}^m$, $Y \in \mathbb{R}^n$, 则

$$X \ltimes Y \ltimes W_{[m,n]} = Y \ltimes X. \tag{11}$$

注 1) 如果$n = p$, 定义2退化为普通矩阵乘法. 因此, 半张量积是普通乘法的推广. 这种推广不仅保留了普通矩阵乘法的所有主要性质, 而且, 使矩阵乘法增加了某种程度的"可交换性".

2) 矩阵运算与数字运算相比, 有两个主要的不便之处: i) 有维数限制, ii) 乘法不可交换. 从某种意义上讲, 当把矩阵乘积推广到半张量积时, 这两个弱点都得到相当程度的克服. 除对维数限制的放松外, 半张量积具有伪交换性质. 同时, 换位矩阵的大量使用也大大改进了交换性质. 这些都使推广后的矩阵乘法比经典矩阵乘法更为方便有效.

3 逻辑动态系统的代数状态空间表示(Algebraic state space representation of logical dynamic systems)

3.1 确定型逻辑动态系统(Deterministic logical dynamic systems)

设$f: \prod_{i=1}^{n} \mathcal{D}_{k_i} \to \mathcal{D}_{k_0}$ 为一个有限值逻辑函数, 用向量表示则有$f: \prod_{i=1}^{n} \Delta_{k_i} \to \Delta_{k_0}$. 记$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $k = \prod_{i=1}^{n} k_i$, 则有

定理 1[12] 设$f: \prod_{i=1}^{n} \mathcal{D}_{k_i} \to \mathcal{D}_{k_0}$为一个有限值逻辑函数. 那么, 存在唯一逻辑矩阵$M_f \in \mathcal{L}_{k_0\times k}$, 使在向量形式下:

$$y = M_f \ltimes_{i=1}^{n} x_i, \tag{12}$$

M_f 称为f 的结构矩阵.

从有限值逻辑函数到逻辑动态系统, 需要一个新工具, 称为矩阵的Khatri-Rao乘法.

定义 4[14] 设$M \in \mathcal{M}_{m\times p}$, $N \in \mathcal{M}_{n\times p}$. 那么, M和N的Khatri-Rao乘积定义为

$$\begin{aligned} & M * N := \\ & [\mathrm{Col}_1(M) \ltimes \mathrm{Col}_1(N), \mathrm{Col}_2(M) \ltimes \mathrm{Col}_2(N), \\ & \quad \vdots \\ & \mathrm{Col}_p(M) \ltimes \mathrm{Col}_p(N)] \in \mathcal{M}_{mn\times p}. \end{aligned} \tag{13}$$

下面考虑有限值逻辑动态系统(2). 先将每个动态方程右边的逻辑函数变为代数形式, 则得

$$x_i(t+1) = M_i \ltimes_{j=1}^{n} x_j(t),\ i = 1, \cdots, n, \tag{14}$$

这里M_i是f_i的结构矩阵.

记$x(t) := \ltimes_{j=1}^{n} x_j(t)$, 则有如下代数状态空间表示.

定理 2[12] 考虑有限值逻辑动态系统(2). 则存在唯一逻辑矩阵$L \in \mathcal{L}_{k\times k}$, 使其动态方程(在向量形式下)变为

$$x(t+1) = Lx(t), \tag{15}$$

这里

$$L = M_1 * M_2 * \cdots * M_n,$$

M_i是f_i的结构矩阵, $i = 1, \cdots, n$.

同样, 记$u(t) := \ltimes_{j=1}^{m} u_j(t)$, $r = \prod_{j=1}^{m} r_j$; $y(t) := \ltimes_{j=1}^{p} y_j(t)$, $s = \prod_{j=1}^{p} s_j$, 则有限值逻辑控制系统(3)有如下代数状态空间表示.

定理 3[13] 考虑有限值逻辑控制系统(3). 则存在唯一逻辑矩阵$L \in \mathcal{L}_{k\times kr}$和逻辑矩阵$H \in \mathcal{L}_{s\times k}$, 使其动态与输出方程(在向量形式下)变为

$$\begin{cases} x(t+1) = Lu(t)x(t), \\ y(t) = Hx(t), \end{cases} \tag{16}$$

这里:

$$L = M_1 * M_2 * \cdots * M_n,$$

M_i是f_i的结构矩阵, $i = 1, \cdots, n$;

$$H = H_1 * H_2 * \cdots * H_p,$$

H_i是h_i的结构矩阵, $i = 1, \cdots, p$.

3.2 概率逻辑动态系统(Probabilistic logical dynamic systems)

考查系统(2). 假如f_i是不确定的, 即

$$f_i=f_i^j,\ \text{以概率}p_i^j,\ j=1,\cdots,n_i;\ i=1,\cdots,n. \tag{17}$$

这样, 系统(2)就变成概率有限值逻辑动态系统. 它是概率布尔网络[15]的自然推广. 设f_i^j的结构矩阵为M_i^j. 记

$$J_i=\{1,2,\cdots,n_i\},\ i=1,\cdots,n;\ J=\prod_{i=1}^n J_i.$$

则对每一个$j\in J$有

$$j=\prod_{i=1}^n j_i,\ j_i\in J_i.$$

于是, 每个$j\in J$都定义了唯一的有限值逻辑动态系统

$$x_i(t+1)=f_i^{j_i}(x_1(t),\cdots,x_n(t)),\ i=1,\cdots,n. \tag{18}$$

记$f_i^{j_i}$的结构矩阵为$M_i^{j_i}$, 那么, 对每个$j\in J$有

$$x(t+1)=L_jx(t),\ j\in J. \tag{19}$$

系统取这个模式的概率为

$$p_j=\prod_{i=1}^n p_i^{j_i},\ j\in J.$$

取期望值则得

$$x(t+1)=Lx(t), \tag{20}$$

这里

$$L=\sum_{j\in J}P_jL_j\in\Upsilon_{k\times k}.$$

3.3 随机逻辑动态系统 (Random logical dynamic systems)

随机有限值逻辑动态系统是随机布尔网络[16]的自然推广. 考查系统(2). 设在每一时刻(等概率)任选$i\in N=\{1,2,\cdots,n\}$, 令i更新, 而让其他变量不动, 即

$$\begin{cases}x_i(t+1)=f_i(x_1(t),\cdots,x_n(t)),\\ x_j(t+1)=x_j(t),\ j\neq i.\end{cases} \tag{21}$$

设式(21)的代数状态空间模型为

$$x(t+1)=M_ix(t),\ i=1,\cdots,n.$$

如果等概率地选择i, 最后得到随机有限值逻辑动态系统的动态方程为

$$x(t+1)=Mx(t), \tag{22}$$

这里

$$M=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n M_i\in\Upsilon_{k\times k}.$$

在演化博弈中, 如果允许使用混合策略, 也会得到这类系统. 我们将这类系统统一称为混合有限值逻辑动态系统.

定义 5 1) 在有限值逻辑动态系统中, 如果$x_i\in\Upsilon_{k_i}$, $i=1,\cdots,n$, 则称系统为混合有限值逻辑动态系统, 其动态方程为

$$x(t+1)=Mx(t), \tag{23}$$

这里$M\in\Upsilon_{k\times k}$.

2) 有限值逻辑控制系统中, 如果$x_i\in\Upsilon_{k_i}(i=1,\cdots,n)$, $u_i\in\Upsilon_{r_i}(i=1,\cdots,m)$, $y_i\in\Upsilon_{s_i}(i=1,\cdots,p)$, 则称系统为混合有限值逻辑控制系统, 其动态方程为

$$\begin{cases}x(t+1)=Lu(t)x(t),\\ y(t)=Hx(t),\end{cases} \tag{24}$$

这里: $L\in\Upsilon_{k\times kr}$, $H\in\Upsilon_{s\times k}$.

下面做一个小结: 代数状态空间方法从控制的角度看, 有不含控制的逻辑动态系统和含控制(亦可能包含输出)的逻辑控制系统; 从状态变量的性质看, 可能是确定型的, 也可能是随机型(或称混合型)的. 从变量取值来看, 有限值逻辑系统为最普通的情况; 当所有有限值均相同时称为k值逻辑系统; 当$k=2$时称布尔网络.

4 代数状态空间方法的进展(Advances in algebraic state space approach)

本节讨论的应用不单指工程应用, 也包括该方法在许多理论研究中的应用. 以下只介绍应用代数状态空间方法的相关研究, 读者如对其他方法有兴趣, 大致可在我们所介绍相关论文所列的参考文献中找到.

4.1 逻辑动态系统的分析(Analysis of logical dynamic systems)

逻辑动态系统的拓扑结构决定了它的许多动力学性质, 因此, 研究清楚其不动点、极限环、吸引域等是很重要的. 布尔网络拓扑结构的主要参考文献为文献[9, 17–19]. 对于一般逻辑动态系统可参考文献[20–21]. 关于随机布尔网络可参考文献[22]. 关于布尔网络的同步可参考文献[23–25]. 关于网络重构可参考文献[26]. 关于大型网络的结构分析可参考文献[27].

4.2 逻辑动态系统的控制(Control of logical dynamic systems)

4.2.1 能控性(Controllability)

布尔网络的能控性是讨论最多的问题之一. 我们仅列举很少的一些典型论文为例. 最早用代数状态空间方法研究布尔网络能控性与能观性的是文献[28]. 文献[29]给出一个能控性易于检验的充要条件. 关于状态受限布尔网络的能控性可参见文献[30–31]. 文

献[32–34]研究了混合型布尔网络的能控性. 许多其他类型的逻辑控制系统的能控性也分别得到深入探讨, 例如, 时变布尔网络[35]、高阶布尔网络[36–37]、切换布尔网络[38–39]、带时延布尔网络[40–41]、周期轨道的可达性[42], 等.

4.2.2 能观性(Observability)

由于线性系统的能控性与能观性有对偶性, 一起讨论比较方便. 虽然逻辑控制系统已经没有这种关系, 但习惯上有时还将这两个概念同时讨论, 如文献[28, 41]. 文献[43]将代数状态空间模型与图论结合研究能观性. 文献[10]研究能观性, 并依此构造状态重构. 文献[44]讨论了具有脉冲效应的布尔网络的能观性. 文献[45]对能观性进行了进一步的分析.

4.2.3 最优控制(Optimal control)

布尔控制网络的极大值原理以及相应的时间最优控制由几位以色列学者率先开始研究[46–47]. 文献[48]讨论了基于博弈的有限值逻辑动态系统的优化. 基于能控性与最小能量的优化可参见文献[49–50]. 最近, 文献[51]提出布尔控制网络的差分Riccati方程, 并证明它也可以导出文献[48]给出的最优控制.

4.2.4 稳定性与镇定(Stability and stabilization)

文献[52]首先提出了用代数状态空间方法研究布尔网络的稳定性与镇定设计的整体框架. 文献[53]及文献[54]分别研究了一般有限值逻辑网络与切换布尔网络的稳定性与镇定. 文献[55]讨论了带脉冲的布尔网络的稳定性与镇定设计. 状态反馈镇定与输出反馈镇定分别在文献[56]与文献[57]中研究, 分别给出了反馈镇定器的设计方法.

4.2.5 系统解耦(Decoupling)

文献[58]提出了布尔网络的状态空间、坐标变换、(正规)子空间等一系列概念及其检验, 这些是逻辑动态系统解耦的基础. 布尔网络的干扰解耦问题的基本解由文献[59]给出. 这个结果被文献[60]推广到一般有限值逻辑网络的情况. 文献[61]给出了干扰解耦控制器的设计方法. 最近, 文献[62]研究了不要求子空间正规的条件下的解耦问题, 大大降低了对解耦的限制.

4.2.6 辩识与实现(Identification and realization)

文献[26]讨论了布尔网络的辩识与利用观测数据重构网络的问题. 文献[58]将该结果推广到一般有限值网络的情况. 文献[63]讨论布尔控制网络的辩识问题. 布尔网络的实现问题在文献[64]中作了较详细的研究, 给出一些实用的方法. 辩识与实现对于布尔网络在生物系统中的应用尤为重要, 例如, 由切片等观测数据判定癌细胞的扩散等. 但目前这方面的研究较少.

4.2.7 相关算法(Algorithms)

代数状态空间方法的一个致命弱点是算法的复杂性. 因此, 研究相关算法是非常重要的. 文献[27]是一个很好的例子, 它使一类布尔网络吸引子的计算时间比经典方法缩短了近一万倍. 对布尔函数或一般逻辑函数微积分的计算也是一个值得关注的问题[65–66].

5 代数状态空间方法的应用(Applications of algebraic state space approach)

5.1 生物系统与生命科学(Biological systems and life sciences)

这个方面目前的一些进展包括:

• 文献[27]研究了T–细胞受体布尔控制网络模型, 给出寻找它所有吸引子的有效算法;

• 关于大肠杆菌乳糖操纵子网络稳定与镇定控制的设计, 论文[56]及[67]分别给出不同的设计方法, 证明了方法的有效性;

• 对黑色素瘤转移控制, 论文[68]给出最优控制的设计与算法.

将布尔网络控制理论用于生物系统是一个非常有希望的交叉方向. 进一步的研究需要跨学科的合作.

5.2 博弈论(Game theory)

代数状态空间在博弈论中的一些应用包括:

• 网络演化博弈的建模和分析[69–70];
• 最优策略与纳什均衡的探索[48];
• 有限势博弈的检验与势函数计算[71];
• 网络演化博弈的演化策略及其稳定性[72].

依赖于有限历史信息(特别是只依赖上一轮信息)的演化博弈, 当玩家与策略有限时, 其演化方程就是一个有限值逻辑演化方程. 因此, 代数状态空间方法对有限演化博弈有天生的优越性. 虽然目前这个方向研究不多, 已发表论文尚少, 但这是一个极具发展潜力的方向.

5.3 线路设计与故障检测(Circuit design and fault diagnosis)

这一方面的一些现有研究工作包括:

• k值逻辑函数的分解, 隐函数存在定理[73];
• 故障检测的矩阵半张量积方法[74].

逻辑电路设计的基础是逻辑函数, 因此, 其设计与检测都离不开逻辑函数. 从某种意义上说, 代数状态空间可能是描述和分析逻辑函数的最有力工具.

5.4 模糊控制(Fuzzy control)

代数状态空间方法在模糊控制方面的一些初步工作包括:

• 模糊关系方程的统一解法[75];
• 带有偶合输入和或偶合输出的模糊系统控

制[76];

- 对二型模糊关系方程的表述和求解[77];
- 在并行混合电动汽车控制中的应用[78].

实际上, 一个模糊变量x就是一个二维混合值变量, 即$x \in \Upsilon_2$. 将模糊系统纳入代数状态空间框架应当是一个自然而合理的设想.

5.5 有限自动机与符号动力学(Finite state automata and symbolic dynamics)

这方面的部分工作包括

- 有限自动机的代数状态空间表示与可达性[79];
- 有限自动机的模型匹配[80];
- 有限自动机的可观性与观测器设计[81];
- 布尔网络的符号动力学方法[82].

无论是有限自动机或符号动力学, 其共同特点是状态取值的有限性. 代数状态空间方法对其研究的有效性是显然的. 同时, 有限自动机或符号动力学中的许多方法和成果, 可以通过代数状态模型而直接应用于一般逻辑动态系统. 就笔者所知, 目前这方面的研究也很活跃.

5.6 图论与队型控制(Graph theory and formation control)

这方面的部分工作包括:

- 图形着色及其在多自主体控制中的应用[83];
- 队型控制的有限值逻辑动态系统表示[84];
- 对超图着色及其在存储问题中的应用[85].

其实, 图和布尔网络的联系是很密切的. 图论在逻辑动态系统的研究中作用重大, 如控制网络的状态转移图[29]等. 代数状态空间方法对图论研究的应用尚属起步.

5.7 编码理论与算法实现(Coding theory and algorithm implementation)

这方面的研究包括:

- 对布尔函数微分计算的研究[86];
- 布尔函数的神经网络实现[48];
- 非线性编码[87].

密码学主要使用布尔函数, 代数状态空间表示是其一个有效的研究工具, 可望该方法在编码及其相关计算中发挥更大作用.

5.8 网络查询与遥操作(Network inquiry and teleoperation)

这方面的工作包括:

- 公交网络的查询[88];
- 网络遥操作系统[89].

矩阵半张量积及代数状态空间方法对网络控制系统的应用应当是一个可期待的方向.

6 结论(Conclusions)

利用作者原创和研究多年的矩阵半张量积为工具, 作者提出了逻辑系统的代数状态空间这一理论框架. 从提出至今六、七年的时间里, 代数状态空间方法得到国内外同行的高度关注和兴趣. 一项相关工作并获得了国际自动控制联合会(IFAC)颁发的其旗舰杂志Automatica 2008～2010理论/方法类最佳论文奖. 由于国内外许多同行学者的参与和他们富有成效的研究工作, 使这一理论和相应方法在短短几年内得到了快速传播和很大的发展, 并被有效地应用于许多不同的领域. 本文的目的首先对代数状态空间方法作一个总结, 从而给出一个综合性的概述. 其次, 对当前的理论研究现状作一小结, 随近对其在许多方面的应用做一个尽可能提纲挈领的介绍. 目的是使有兴趣参与此项研究的学生/学者容易找到自己可能的切入点.

这是一片待开垦的处女地, 这是我们中国人原创和主导的新领域, 这里充满了新的挑战和新的机遇, 我们渴望更多朋友, 特别是年轻学子的加入!

参考文献(References):

[1] KAUFFMAN S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1969, 22(3): 437 – 467.

[2] WALDROP M M. *Complexity – The Emerging Science at the Edge of Order and Chaos* [M]. New York: Simon & Schuster, 1992.

[3] KAUFFMAN S A. *The Origins of Order: Self-Organization and Selection in Evolution* [M]. New York: Oxford University Press, 1993.

[4] KAUFFMAN S A. *At Home in the Universe* [M], Oxford: Oxford University Press, 1995.

[5] FARROW C, HEIDEL J, MALONEY H, et al. Scalar equations for synchronous Boolean networks with biological applications [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2004, 15(2): 348 – 354.

[6] IRONS D J. Improving the efficiency of attractor cycle identification in Boolean network [J]. *Physica D*, 2006, 217(1): 7 – 21.

[7] HEIDEL J, MALONEY J, FARROW J, et al. Finding cycles in synchronous Boolean networks with applications to biochemical systems [J]. *International Journal of Bifurcat Chaos*, 2003, 13(3): 535 – 552.

[8] DROSSEL B, MIHALJEV T, GREIL F. Number and length of attractors in a critical Kauffman model with connectivity one [J/OL]. *Physics Review Letters*, 2005, 94: 088701. http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.94.088701.

[9] CHENG D, QI H. A linear representation of dynamics of Boolean networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(10): 2251 – 2258.

[10] FORNASINI E, VALCHER M E. Observability, reconstructibility and state observers of Boolean control networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(6): 1390 – 1401.

[11] 程代展, 齐洪胜. 矩阵的半张量积——理论与应用 [M]. 第2版. 北京: 科学出版社, 2011.
(CHENG Daizhan, QI Hongsheng. *Semi-tensor Product of Matrices: Theory and Application* [M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2011.)

[12] CHENG D, QI H, LI Z. *Analysis and Control of Boolean Networks: a Semi-tensor Product Approach* [M]. London: Springer, 2011.

[13] CHENG D, QI H, ZHAO Y. *An Introduction to Semi-tensor Product of Matrices and Its Applications* [M]. Singapore: World Scientific, 2012.

[14] 张贤达. 矩阵分析与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.

(ZHANG Xianda. *Matrix Analysis and Applications* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.)

[15] SHMULEVICH I, DOUGHERTY E, KIM S, et al. Probabilistic Boolean networks: a rule-based uncertainty model for gene regulatory networks [J]. *Bioinformatics*, 2002, 18(2): 261 – 274.

[16] GREIL F, DROSSEL B. Dunamics of critical Kauffman networks under asynchronous stochastic update [J]. *Physical Review Letters*, 2005, 95(4): 048701.

[17] CHENG D, QI H. State-space analysis of Boolean networks [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, 21(4): 584 – 594.

[18] LI R, CHU T. Synchronization in an array of coupled Boolean networks [J]. *Physics Letters A*, 2012, 376(45): 3071 – 3075.

[19] LI H, WANG Y, LIU Z. Existendce and number of fixed points of Boolean transformations via the semi-tensor product method [J]. *Applied Mathmatics Letters*, 2012, 25(8): 1142 – 1147.

[20] LI Z, CHENG D. Algebraic approach to dynamics of multi-valued networks [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2010, 20(3): 561 – 582.

[21] LI F, SUN J. Synchronization analysis for multivalued logical networks [J]. *International Journal of Bification Chaos*, 2013, 23(4): 1350059.

[22] LUO C, WANG X. Dynamics of random Boolean networks under fully asynchronous stochastic update based on linear representation [J]. *PLOS One*, 2013, 8(6): e66491.

[23] LI R, CHU T. Complete synchronization of Boolean networks [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems*, 2012, 23(5): 840 – 846.

[24] LI R, YANG M, CHU T. Synchronization design of Boolean networks via the semi-tensor product method [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems*, 2013, 24(6): 996 – 1001.

[25] LI R, CHU T. Synchronization of Boolean networks with time delays [J]. *Applied Mathematics & Computation*, 2012, 219(3): 917 – 927.

[26] CHENG D, QI H, LI Z. Model construction of Boolean network via observed data [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, 22(4): 525 – 536.

[27] ZHAO Y, KIM J, FILIPPONE M. Aggregation algorithm towards large-scale Boolean netwok analysis [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(8): 1976 – 1985.

[28] CHENG D, QI H. Controllability and observability of boolean control networks [J]. *Automatica*, 2009, 45(7): 1659 – 1667.

[29] ZHAO Y, QI H, CHENG D. Input-state incidence matrix of Boolean control networks and its applications [J]. *Systems Control & Letters*, 2010, 59(12): 767 – 774.

[30] LASCHOV D, MARGALIOT M. Controllability of Boolean control networks via the Perron-Frobenius theory [J]. *Automatica*, 2012, 48(6): 1218 – 1223.

[31] LIU Y, CHEN H, WU B. Controllability of Boolean control networks with impulsive effects and forbidden sates [J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2014, 37(1): 1 – 9.

[32] LI F, SUN J. Controllability of probabilistic Boolean control networks [J]. *Automatica*, 2011, 47(12): 2765 – 2771.

[33] CHEN S, HONG Y. Control of random Boolean networks via average sensitivity of Boolean functions [J]. *Chinese Physics B*, 2011, 20(3): 036401.

[34] ZHAO Y, CHENG D. On controllability and stabilizability of probabilistic Boolean control networks [J]. *Science China Information Sciences*, 2014, 57(1): 1 – 14.

[35] ZHANG L, ZHANG K. Controllability of time-variant Boolean control networks and its application to Boolean control networks with finite memories [J]. *Science China F, Information Sciences*, 2013, 56(10): 108201.

[36] LIU Z, WANG Y. Reachability/controllability of high order mixvalued logical networks [J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2013, 26(3): 341 – 349.

[37] CHEN H, SUN J. A new approach for global controllability of higher order Booolean control network [J]. *Neural Networks*, 2013, 39: 12 – 17.

[38] LI H, WANG Y. On reachability and controllability of switched Boolean control networks [J]. *Automatica*, 2012, 48(11): 2917 – 2922.

[39] ZHANG L, FENG J, YAO J. Controllability and observability of switched Boolean control networks [J]. *IET Control Theory Applications*, 2012, 6(16): 2477 – 2484.

[40] LI F, SUN J. Controllability of Boolean control networks with time delays in states [J]. *Automatica*, 2011, 47(3): 603 – 607.

[41] ZHANG L, ZHANG K. Controllability and observability of Boolean control networks with time-variant delays in states [J]. *IEEE Transactions on Neural Network and Learn. Systems*, 2013, 24(9): 1478 – 1484.

[42] FORNASINI E, VALCHER M E. On the periodic trajectories of Boolean control networks [J]. *Automatica*, 2013, 49(5): 1506 – 1509.

[43] LASCHOV D, MARGALIOT M, EVEN G. Observbility of Boolean networks: a graph-theoretic approach [J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2351 – 2362.

[44] LI F, SUN J. Observability analysis of Boolean control networks with impulsive effects [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2011, 5(14): 1609 – 1616.

[45] SHI W, WU B, HAN J. A note on the observability of temporal Boolean control network [J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2013, 631639.

[46] LASCHOV D, MARGALIOT M. A maximum principle for single-input Boolean control networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(4): 913 – 917.

[47] LASCHOV D, MARGALIOT M. Minimum-time control of Boolean networks [J]. *SIAM Journal of Control Optimization*, 2013, 51(4): 2869 – 2892.

[48] ZHAO Y, LI Z, CHENG D. Optimal control of logical control networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(8): 1766 – 1776.

[49] LI F, SUN J. Controllability and optimal control of a temporal Boolean network [J/OL]. *Neural Networks*, 2012, 34: 10 – 17. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893608012001591.

[50] LI F, LU X. Minimum energy control and optimal-satisfactory control of Boolean control network [J]. *Physics Letters A*, 2013, 337(43): 3112 – 3118.

[51] FORNASINI E, VALCHER M E. Optimal control of Boolean control networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(5): 1258 – 1270.

[52] CHENG D, QI H, LI Z, et al. Stability and stabilization of Boolean networks [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, 21(2): 134 – 156.

[53] LI F, SUN J. Stability and stabilization of multivalued logical networks [J]. *Nonlinear Analysisi–Real World Applications*, 2011, 12(6): 3701 – 3712.

[54] CHEN H, SUN J. Global stability and stabilization of switched Boolean network with impulsive effects [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 224: 625 – 624.

[55] LI F, SUN J. Stability and stabilization of Boolean neworks with impulsive effects [J]. *Systems Control & Letters*, 2012, 61(1): 1 – 5.

[56] LI R, YANG M, CHU T. State feedback stabilization for Boolean control networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(7): 1853 – 1857.

[57] LI H, WANG Y. Output feedback stabilization control design for Boolean control networks [J]. *Automatica*, 2013, 49(12): 3641 – 3645.

[58] CHEN H, SUN J. Model construction of mix-valued logical networks via observed data [C] //*Proceedings of the 12th International Conference on Control Automation Robotics & Vision (ICARCV 2012)*. Guangzhou: IEEE, 2012: 413 – 417.

[59] CHENG D. Disturbance decoupling of Boolean control networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(1): 2 – 10.

[60] LIU Z, WANG Y. Disturbance decoupling of mix-valued logical networks via the semi-tensor product method [J]. *Automatica*, 2012, 48(8): 1839 – 1844.

[61] YANG M, LI R, CHU T. Cotroller design for disturbance decoupling of Boolean control networks [J]. *Automatica*, 2013, 49(1): 273 – 277.

[62] ZOU Y, ZHU J. System decomposition with respect to inputs for Boolean control networks [J]. *Automatica*, 2014, 50(4): 1304 – 1309.

[63] CHENG D, ZHAO Y. Identification of Boolean control networks [J]. *Automatica*, 2011, 47(4) 702 – 710.

[64] CHENG D, LI Z, QI H. Realization of Booolena control networks [J]. *Automatica*, 2010, 46(1): 62 – 69.

[65] CHEN H, SUN J. A new calculation for Boolean derivative using Cheng product [J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2012, Article ID. 748343. http://www.hindawi.com/journals/jam/2012/748343/.

[66] ZHAO Y, CHENG D. Calculus of pseudo-Boolean functions [C] //*Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*. Hefei: Shanghai Systems Science Press, 2012: 267 – 272.

[67] LI H, WANG Y. Output feedback stabilization control design for Boolean control networks [J]. *Automatica*, 2013, 49(12): 3641 – 3645.

[68] 赵寅. 布尔网络的控制与优化 [D]. 北京: 中国科学院大学, 2013.
(ZHAO Yin. *Control and optimization of Boolean networks* [D]. Beijing: University of Chinese Academy of Sciences, 2013.)

[69] GUO P, WANG Y, LI H. Algebraic formulation and strategy optimization for a class of evolutionary networked games via semi-tensor product method [J]. *Automatica*, 2013, 49(11): 3384 – 3389.

[70] CHENG D, HE F, QI H, et al. Modeling, analysis and control of networked evolutionary games [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, (provisionally accepted), Online Preprint: http://lsc.amss.ac.cn/∼dcheng/preprint/NTGAME02.pdf.

[71] CHENG D. On finite potential games [J]. *Automatica*, 2014, 50(7): 1793 – 1801.

[72] CHENG D, XU T, QI H. Evolutionarily stable strategy of networked evolutionary games [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, 25(7): 1335 – 1345.

[73] CHENG D, XU X. Bi-decomposition of multi-valued logical functions and its applications [J]. *Automatica*, 2013, 49(7): 1979 – 1985.

[74] LI H, WANG Y. Boolean derivative calculation with application to fault detection of combinational cirts via the semi-tensor product method [J]. *Automatica*, 2012, 48(4): 688 – 693.

[75] CHENG D, FENG J, LÜ H. Solving fuzzy relational equations via semi-tensor product [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, 20(2): 390 – 396.

[76] FENG J, LÜ H, CHENG D. Multiple fuzzy relation and its application to coupled fuzzy control [J]. *Asian Journal of Control*, 2013, 15(5): 1313 – 1324.

[77] YAN Y, CHEN Z, LIU Z. Solving type-2 fuzzy relation equations via semi-tensor product of matrices [J]. *Control Theory and Technology*, 2014, 12(2): 173 – 186.

[78] 葛爱冬, 王玉振, 魏爱荣, 等. 多变量模糊系统控制设计及其在并行混合电动汽车中的应用 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(8): 998 – 1004.
(GE Aidong, WANG Yuzhen, WEI Airong, et al. Control design for multi-variable fuzzy systems with application to parallel hybrid electric vehicles [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(8): 998 – 1004.

[79] XU X, HONG Y. Matrix expression and reachability of finite automata [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2012, 10(2): 210 – 215.

[80] XU X, HONG Y. Matrix expression to model matching of asynchronous sequential machines [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(11): 2974 – 2979.

[81] XU X, HONG Y. Observability and observer design for finite automata via matrix approach [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2013, 7(12): 1609 – 1615.

[82] HOCHMA G, MARGALIOT M, FORNASINI E. Symbolic dynamics of Boolean control networks [J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2525 – 2530.

[83] WANG Y, ZHANG C, LIU Z. A matrix approach to graph maximum stable set and coloring problems with application to multi-agent systems [J]. *Automatica*, 2012, 48(7): 1227 – 1236.

[84] ZHANG L, FENG J. Mix-valued logic-based formation control [J]. *International Journal of Control*, 2013, 86(6): 1191 – 1199.

[85] MENG M, FENG J. A matrix approach to hypergraph stable set and coloring problems with its application to storing problem [J/OL]. *Journal of Applied Mathematics*, 2014, Article ID.783784. http://www.hindawi.com/journals/jam/2014/783784/.

[86] ZHAN J, LU S, YANG G. Improved calculation scheme of structure matrix of Boolean network using semi-tensor product [M] //LIU C, WANG L, YANG A, Eds. *Information Computing and Applications, Part 1, Bool Series: Communications in Computer and Information Science*. Chengde: Springer Berlin Heidelberg, 2012, 307: 242 – 248.

[87] ZHAO D, PENG H, LI L, et al. Novel way to research nonlinear feedback shift register [J]. *Science China F, Information Sciences*, 2014, 57(9): 1 – 14.

[88] 刘旭浩, 徐勇. 基于半张量积理论的公交网络查询 [J]. 复杂系统与复杂性科学, 2013, 10(1): 38 – 44.
(LIU Xuhao, XU Yong. An inquiry methond of transit network based on semi-tensor product [J]. *Complex Systems and Complexity Science*, 2013, 10(1): 38 – 44.)

[89] 陈宜滨, 席宁, 缪磊, 等. 半张量积理论在网络遥操作系统中的应用 [J]. 机器人, 2012, 34(1): 50 – 55, 64.
(CHEN Yibin, XI Ning, MIAO Lei, et al. Applications of the semi-tensor product to the internet-based tele-operation systems [J]. *Robot*, 2012, 34(1): 50 – 55, 64.)

作者简介:

程代展　(1946–), 男, 研究员, 目前研究方向为非线性控制、逻辑动态系统、博弈论等, E-mail: dcheng@iss.ac.cn;

齐洪胜　(1982–), 男, 副研究员, 目前研究方向为逻辑动态系统、演化博弈等, E-mail: qihongsh@amss.ac.cn.