第22卷第6期
2005年12月

控制理论与应用
Control Theory & Applications

Vol.22 No.6
Dec. 2005

文章编号: 1000-8152(2005)06-0954-07

切换系统进展

程代展, 郭宇骞
(中国科学院 系统科学研究所,北京 100080)

摘要: 在过去30年中,控制界对切换系统的建模、分析、综合与控制的研究兴趣不断升高.本文的目的是对切换系统研究的近期发展作一个综述.主要论题包括:1)共同Lyapunov函数; 2)切换系统镇定; 3)切换系统能控性.最后对切换系统发展方向作一展望.另外,附录中给出一些相关的辅助知识.

关键词: 切换系统; 共同二次Lyapunov函数; 镇定; 能控性; 复杂性

中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Advances on switched systems

CHENG Dai-zhan, GUO Yu-qian
(Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: During the last three decades, there has been an increasing interest on the modeling, analysis, synthesis, and control of switched systems. The purpose of this paper is to give a survey on the current development of the research on switched systems. The main topics consist of i) common Lyapunov function; ii) stabilization of switched systems; iii) controllability of switched systems. Finally, prospect of development is presented. In addition, some auxiliary knowledge is illustrated in the appendix.

Key words: switched systems; common (quadratic) Lyapunov function; stabilization; controllability; complexity

1 引言(Introduction)

在过去30年中,切换系统是一个热门话题,如果你用Google在网上搜索"switched systems",会发现有3410000条相关条目.在Sciencedirect上,你可以找到1062篇关于切换系统的文章(到2004年11月23号).表1反映了人们对切换系统研究兴趣的增长.

表1 在Sciencedirect上切换系统论文数

Table 1 Number of papers on switched systems cited in sciencedirect

年份	1970~1979	1980~1989	1990~1999	2000~
年平均数(篇)	6.8	15.2	44.6	78.8

在国际切换系统研究领域活跃的中国群体有:中国科学院系统科学研究所,北京大学,清华大学,东北大学等.

对切换系统兴趣增长有以下3个方面的原因:

1) 切换系统在实践中十分重要,因为许多自然、社会以及工程系统由于环境的变化而表现出不同的模态.例如:

1° 输电系统:当发电机及大的用电设备进入或撤出电网时,以及变电站的切换等[1,2];

2° 飞行器队型、运动机器人、交通控制等[3];

3° 汽车工业、车辆控制[4];

4° 模糊系统分析,基于逻辑的切换控制[3,5];

2) 基于不同控制器切换的控制技术,它大量用于自适应镇定控制和改进过度过程的响应,例如:

1° 混杂系统多控制器监控[6,7];

2° 基于多模态的自适应控制[8];

3° 环境驱动的切换控制(边界、相对阶病态点等)[9,10].

3) 它与复杂性科学的关系:

1° 它本身有复杂性,整体不等于各模态之"和",即$1+1\neq 2$;

2° 在群集行为中局部信息可由邻接矩阵表示,它的演化形成切换矩阵[11,12].

发表于1999年的文献[13]是一个写得很好而被广泛引用的综述,对切换系统不熟悉的读者可通过它了解切换系统的全貌及相关概念.本文的目的主要是介绍其后的新进展.关于线性切换系统,在本文完成后,又有一篇最新综述文章[14]值得参考.

收稿日期:2004-12-06; 收修改稿日期:2005-06-24.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60274010,60343001,60221301,60334040).

本文考虑的切换系统为

$$\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x). \tag{1}$$

这里 $\sigma(t) \to \Lambda$ 为右连续函数,Λ 为指标集.除非另外说明,多数情况下假定 Λ 是有限集,记作 $\Lambda = \{1,2,\cdots,N\}$.

一个切换控制系统定义为

$$\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x) + \sum_{i=1}^{m} g_{\sigma(t)}(x) u_i. \tag{2}$$

特别地当 $f(x)$ 为线性及 $g_i(x)$ 为定常,则有切换线性系统

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)} x \tag{3}$$

及切换线性控制系统

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)} x + \sum_{i=1}^{m} b_{\sigma(t)} u_i. \tag{4}$$

对于一个切换系统,切换律可分为几类:

1) $\sigma(t)$ 为任意切换,即它是任意右连续函数(但一般要求在有限时间区间内只能切换有限次);

2) $\sigma(t)$ 能控,即它是可设计的右连续函数;

3) $\sigma(t)$ 是一个随机的(一般为 Markov)过程,即它按随机(Markov)过程演化;

4) $\sigma = \sigma(x,t)$ 依赖于状态,即它为一状态反馈切换律.

2 共同 Lyapunov 函数(Common lyapunov function)

对系统(1)如果存在一个 Lyapunov 函数 $V(x) > 0$,使得对所有的切换模态

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f_\lambda(x) \leqslant 0 \ (\text{or} < 0),\ \forall \lambda \in \Lambda,$$

那么显然系统是稳定(渐进稳定)的.如果 $V(x)$ 是径向无界的,则结果是全局的.因此,这样一个 Lyapunov 函数(称为共同 Lyapunov 函数)是研究切换系统的一个重要课题.

对于线性系统(3),一般要找的是二次 Lyapunov 函数.在 2004 年的一本新书[15]中,寻找共同 Lyapunov 函数被列为系统与控制中基本的未解问题之一.但显然共同 Lyapunov 函数只是切换系统稳定的充分条件[16].

2.1 线性系统(Linear system)

先从线性系统入手寻找式(3)的共同二次 Lyapunov 函数.一般地说,

定义 1 给定一组稳定矩阵 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$,若存在一个正定矩阵 $P > 0$ 使得

$$PA_\lambda + A_\lambda^{\mathrm{T}} P < 0,\ \forall \lambda \in \Lambda, \tag{5}$$

则称它为 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$ 的一个共同二次 Lyapunov 函数.

注 本文主要考虑有限个切换模型的情况,即 $|\Lambda| < \infty$.如果 $|\Lambda| = \infty$,式(5)应用下式代替:

$$PA_\lambda + A_\lambda^{\mathrm{T}} P < \varepsilon I,\ \forall \lambda \in \Lambda. \tag{6}$$

这里 $\varepsilon > 0$.

总的来说,这个问题尚未彻底解决,但已经有许多重要进展,特别是,近期的重要进展包括文献[17~25].

下面列举一些有趣的结果,它们不仅有重要影响而且显示了该问题的进展脉络.

定理 1[26] 设 $A_i(i = 1,2,\cdots,N)$ 为一组可交换的稳定矩阵,则存在它们的共同二次 Lyapunov 函数.

这个结果的一个优点是其共同二次 Lyapunov 函数可以构造如下:选一个正定矩阵 P_0,定义 $P_i > 0(i = 1,2,\cdots,N)$ 如下:

$$\begin{cases} P_1 A_1 + A_1^{\mathrm{T}} P_1 = -P_0, \\ P_2 A_2 + A_2^{\mathrm{T}} P_2 = -P_1, \\ \quad \vdots \\ P_N A_N + A_N^{\mathrm{T}} P_N = -P_{N-1}, \end{cases} \tag{7}$$

那么 P_N 就是一个共同二次 Lyapunov 函数,P_N 的解析表达式如下:

$$P_N = \int_0^\infty e^{A_N^{\mathrm{T}} t_N} \int_0^\infty e^{A_{N-1}^{\mathrm{T}} t_{N-1}} \cdots \int_0^\infty e^{A_1^{\mathrm{T}} t_1} P_0 e^{A_1 t_1} \mathrm{d}t_1 \cdots e^{A_{N-1} t_{N-1}} \mathrm{d}t_{N-1} e^{A_N t_N} \mathrm{d}t_N. \tag{8}$$

下一个结果表述为 Lie-代数的形式,定理 1 是它的特例.

定理 2[27] 设由 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$ 生成的 Lie-代数 $\{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}_{LA}$ 可解,那么 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$ 有共同二次 Lyapunov 函数.

注 1) 这个结果适用于 $|\Lambda| = \infty$; 2) 关于"Lie 代数可解"见附录 1.

下面的结果更一般:

定理 3[28] 设 Lie-代数 $L = \{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}_{LA}$ 的 Levi 分解为

$$L = S \oplus R. \tag{9}$$

这里:S 是半单子代数,R 称为根,是其最大可解理想.如果 S 紧,则 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$ 有共同二次 Lyapunov 函数.

关于半单 Lie-代数、Levi 分解、紧 Lie-代数等概念见附录 1.

下面给出一个充要条件[29]:

引理 1 $\{A_1,\cdots,A_N\}$ 有共同二次 Lyapunov 函数当且仅当存在一个线性变换 $T \in SO(n,R)$,使得

$\{T^{-1}A_1T,\cdots,T^{-1}A_NT\}$ 有一个对角型的共同二次Lyapunov函数.

基于这个事实,一个稳定矩阵的Lyapunov函数集合可以用一组不等式表示,而共同二次Lyapunov函数的存在可转化为一个积分,即存在共同二次Lyapunov函数当且仅当该积分是正的.特别是在平面的情况,共同二次Lyapunov函数集合可由两条二次曲线刻画,因此,上述条件变为极易检验的充要条件[29].上述关于平面情况的结果可推广到离散情况[30].

最后,数值解也是寻找共同二次Lyapunov函数的一个在实际中行之有效的方法.一些有用的算法可在[19,31,32]中找到.

2.2 非线性情况(Nonlinear system)

首先给出一组向量场 $f_\lambda(x),\lambda\in\Lambda$ 的共同Lyapunov函数的严格定义:

定义 2[33] $f_\lambda(x),\lambda\in\Lambda$ 的一个共同Lyapunov函数是一个 C^1 函数 $V:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ 使得存在 K_∞ 函数 α_1 和 α_2, 满足

$$\alpha_1(|\xi|)\leqslant V(\xi)\leqslant\alpha_2(|\xi|),\ \xi\in\mathbb{R}^n \quad (10)$$

且

$$\nabla f(\xi)f_\lambda(\xi)<0,\ \xi\neq 0,\ \forall\lambda\in\Lambda. \quad (11)$$

类似于线性情况,如果 $|\Lambda|=\infty$,条件(11)应用下列条件代替:存在一个连续正定函数 α_3, 使得

$$\nabla f(\xi)f_\lambda(\xi)<\alpha_3(\xi),\ \xi\neq 0,\ \forall\lambda\in\Lambda. \quad (12)$$

对于一组非线性向量场,找共同Lyapunov函数要比线性情况困难得多.作为定理1的推广,一个较好的结果是

定理 4[34] $f_\lambda(x),\lambda\in\Lambda$ 具有一个共同的Lyapunov函数,如果

1) $[f_i,f_j]=0,\forall i,j\in\Lambda$;

2) 存在 KL 函数 $\beta_i(\xi,t)$ 使得

$$\phi_t^{f_\lambda}(\xi)\leqslant\beta_\lambda(|\xi|,t),\ \forall t\geqslant 0,\ \forall\lambda\in\Lambda. \quad (13)$$

当 $|\Lambda|<\infty$,式(13)中的 β_λ 可以用一个统一的 β 代替.

关于 K,K_∞,KL 函数,见附录2.

对一组有限个两两可交换且全局渐进稳定的非线性向量场,文献[35]给出构造局部及全局Lyapunov函数的方法.

对非线性切换系统,一个研究热点是Lyapunov逆定理[16],通常它要求切换系统一致全局渐进稳定(UGAS).

定义 3[36] 切换系统(1)为UGAS,如果存在一个 KL 函数 β 使得

$$\phi_t^{f_\lambda}(\xi)\leqslant\beta(|\xi|,t),\ \forall t\geqslant 0,\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ \forall\lambda\in\Lambda. \quad (14)$$

基于文献[36]的结果,下面的Lyapunov逆定理成立:

定理 5[34] 系统(1)为UGAS,当且仅当存在一个 C^∞ 函数 $V:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$, 使得

$$\alpha_1(|\xi|)\leqslant V(\xi)\leqslant\alpha_2(|\xi|),\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n \quad (15)$$

及

$$\nabla V(\xi)f_\lambda(\xi)\leqslant-\alpha_3(|\xi|),\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ \forall\lambda\in\Lambda. \quad (16)$$

这里: α_1 和 α_2 为 K_∞ 函数, α_3 为连续正定函数.

对于控制Lyapunov函数,控制Lyapunov逆定理也是一些相应的重要结果[37].

3 镇定(Stabilization)

切换系统的镇定器设计是系统控制的一个基本任务[38,39],它也是一项比较困难的工作,许多不同的工具被用来研究这一问题,例如:

- 共同Lyapunov函数方法[40,41];
- 扩张LaSalle不变原理[42];
- 多重Lyapunov函数方法[43];
- 自适应镇定器[44~46];
- 微分包含[47];
- 基于观测器的镇定[31].

下面的结果完全解决了平面系统的二次镇定问题:

定理 6[40] 设 $\Lambda=\{1,2,\cdots,N\}$. 平面切换系统(4)可二次镇定,当且仅当下列不等式具有正解 $x>0$:

$$\begin{cases}\max\limits_{i\in S_n}Q_i(x)<0,\\ \min\limits_{i\in S_p}Q_i(x)>\max\limits_{i\in S_n}Q_i(x),\\ L_i(x)>0,\ I\in S_z.\end{cases} \quad (17)$$

事实上,式(17)是一组线性不等式,求解极其简单.

另一个重要结果是:文献[45]对离散时间切换线性系统自适应镇定给出了一组充要条件.

状态反馈切换镇定,即:切换律 $\sigma=\sigma(x)$, 是一个很困难的问题,需要小心对待.例如:1)解的存在唯一性; 2)切换模上的超调和振颤[48].微分包含很可能成为克服这些困难的有力工具.

4 能控性(Controllability)

切换系统的能控性与稳定性或镇定同样重要.目前的结果主要是针对线性情况的.

4.1 线性情况(Linear system)

目前对切换线性系统的能控性研究十分活跃,例如见文献[38,49~52].

当考虑切换系统能控性时,切换律总假定是能控的,即:切换律可根据需要设计,于是,能控性定义为

定义4 状态 $x \in \mathbb{R}^n$ 在 t_0 时刻能控,如果存在时刻 $t_f > t_0$ 及一个切换律 $\sigma:[t_0,t_f] \to \Lambda$,使得 $x(t_f;t_0,x,u,\sigma) = 0$.

记包含 B 且 A-不变的最小子空间为 $\langle A \mid B\rangle$.

关于切换系统能控性的一个重要结果是(略有改动):

定理7[51] 对系统(4),能控子空间为

$$C = \langle A_1 \cdots A_N \mid B_1,\cdots,B_N\rangle, \tag{18}$$

因此,系统能控当且仅当 $\dim(C) = n$.

能控系统控制器的设计可在文献[38]中找到.

事实上,能控子空间不足以刻划一个切换系统的全部能控集.考虑以下系统:

例1[53] 考虑系统

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x,\ x \in \mathbb{R}^2. \tag{19}$$

这里 $\Lambda = \{1,2,3\}$,且

$$A_{1,2} = \pm I,\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据定理7,该系统的能控子空间为 $\{0\}$,但容易证明其能控子流形是 $M_c = R^2/\{0\}$.因此沿 A_1 和 A_2,轨线可以沿径向走(增大或减小),而沿 A_3 走它可以走一个圆圈,因此对任意两点 $x_1,x_2 \in M_c$,$x_1 \in \mathbb{R}(x_2)$ 且 $x_2 \in \mathbb{R}(x_1)$.

上述例子表明,一个系统的能控子空间为 $\{0\}$,但仍可能几乎处处可控.因此,与线性系统不同,能控子空间不足以描述切换线性系统的可控性.文献[53]讨论了切换线性系统的能控子流形.

4.2 非线性情况(Nonlinear system)

非线性系统能控性是一个难题,它的一个基本工具是周定理(Chow's Theorem):

定理8(周定理) 设 M 为 n 维 C^∞ 流形,$S = \{X_1,\cdots,X_k\} \subset V^\infty(M)$ 为一 C^∞ 向量场集合,$L = \{X_1,\cdots,X_k\}_{LA}$ 为 S 生成的Lie-代数.设 $\mathrm{rank}(L(x)) = \mathrm{const} \leqslant n$,对任一点 $x_0 \in M$,记 $I_S(x_0)$ 为 S 经过 x_0 的最大积分子流形,那么对子流形上的任一点 $x \in I_S(x_0)$ 都存在

$$X_{i_1},\cdots,X_{i_s} \in S$$

及 $t_1,\cdots,t_s \in \mathbb{R}$ 使得

$$x = \phi_{t_1}^{X_{i_1}} \cdots \phi_{t_s}^{X_{i_s}}(x_0),$$

而且,若流形与向量场均解析,定常维数的条件可去掉.

考虑切换多项式系统(例如切换线性与切换双线性系统),它们比一般非线性系统有两个优越处:

· 系统是分段解析的,因此周定理中维数定常这一条件可去掉;

· 漂移项(通过必要状态反馈)可能对称,因此由周定理保证的弱可控(即包括倒退时间)可能变成真实的能控性.

利用这两个优点,文献[54]给出了双线性切换系统的能控性的一些实用的充分条件.

5 结论(Conclusion)

本文回顾了切换(控制)系统的一些基本问题,主要包括:1) 一组向量场的共同Lyapunov函数问题(包括线性、非线性情况); 2) 切换系统镇定; 3) 切换系统能控性.

由于切换系统是一个很广泛的领域,且加之作者的知识和个人偏爱,综述难免偏颇.这个领域的研究正方兴未艾,许多挑战性的问题还未解决.

根据作者个人判断,一些新的方向在未来可能会更显重要,例如:

· 最优控制.切换是最优控制的一个有力工具,经典极大值原理导致的Bang-Bang控制就是切换型的控制.切换系统优化控制的一些新结果可见文献[30,55].

· 与复杂性相关的切换系统.利用自然界群集行为研究社会行为控制是系统与控制一个新方向,它是控制理论与复杂性科学的一个交叉点.这方面的工作可见文献[11,56,57].

一个有趣的例子是主体(Agent)利用局部信息的队列控制.下面的例子表明局部信息技术如何导致切换模型.

例2[11] 设平面上 N 个运动的粒子 $x_i(t)$,$i = 1,2,\cdots,N$.用 $\theta_i(t)$ 表示第 i 个主体在时刻 t 的运动方向角,用 r 表示圆形邻域的半径,即第 i 个粒子的邻域为 $N_i(t) = \{j \mid \|x_j(t) - x_i(t)\| \leqslant r\}$(邻接情况见图1).

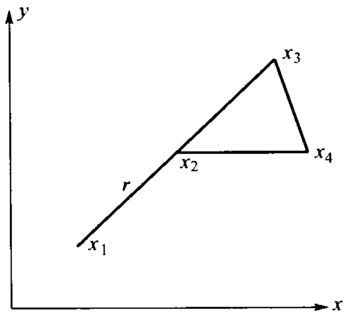

图 1　邻接图
Fig. 1　Adjacent graph

设每个主体以其邻域内主体的平均方向为自己的新方向,即

$$\theta_i(t+1) = \langle \theta_i(t) \rangle_r. \tag{20}$$

这里

$$\langle \theta_i(t) \rangle = \frac{1}{1+n_i(t)}\big(\theta_i(t) + \sum_{j\in N_i(t)} \theta_j(t)\big).$$

例如粒子数 $N=4$, 粒子的位置为 $x_1(2,2)$, $x_2(5,5)$, $x_3(8,8)$, $x_4(5,9) \in \mathbb{R}^2$,且半径为 $r=3\sqrt{2}$. 那么邻接矩阵为(第 i 行为第 i 个粒子邻接的情况, $a_{ij}=1$ 表示 i,j 相接, $a_{ij}=0$ 表示 i,j 不相接):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

权重矩阵为(对角元 a_{ii} 表示与 i 粒子相接的粒子数)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

用 p 记某种邻接情况,并记

$$F_p = (I + D(p)^{-1}(I + A(p))),$$

于是得到切换动力系统模型为

$$\theta(t+1) = F_{\sigma(t)}\theta(t). \tag{21}$$

这里

$$\sigma(t): \{0,1,2,\cdots,\} \mapsto P = \{p\}.$$

由上述例子可以看出切换系统在复杂系统研究中的作用的一些端倪. 相信切换系统理论会在复杂性科学中起到越来越重要的作用.

参考文献(References):

[1] OOBA T, FUNAHASHI Y. On a common quadratic Lyapunov function for widely distant systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 42(12): 1697 – 1699.

[2] VU L, LIBERZON D. Common Lyapunov functions for a families of commuting nonlinear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(5): 405 – 416.

[3] MORSE A S. Supervisory control of families of linear set-point controllers part 1: exact matching [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(9): 1413 – 1431.

[4] BALLUCHI A, Di BENEDETTO M D, PONELLO C, et al. Hybrid control in automative applications: the cut-off control [J]. *Automatica*, 1999, 35(3): 519 – 535.

[5] SUN Z. Stabilization and insensitivity of switched linear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(7): 1133 – 1137.

[6] MORI Y, MORI T, KUROE Y. On a class of linear constant systems which have a common quadratic Lyapunov function [C] // *Proc of the 37th IEEE Conf on Decision and Control*. Tampa, Florida: IEEE Press, 1998, 3: 2808 – 2809.

[7] MORI Y, MORI T, KUROE Y. Some new subclasses of systems having a common quadratic Lyapunov function and comparison of known subclasses [C] // *Proc of the 40th IEEE Conf on Decision and Control*. Orlando Florida: IEEE Press, 2001, 3: 2179 – 2180.

[8] NARENDERA K S, BALAKRISHNAN J. A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(12): 2469 – 2471.

[9] ZHANG L, CHENG D, LIU J. Stabilization of linear switched systems [J]. *Asian J of Control*, 2003, 5(4): 476 – 484.

[10] CHEN W, BALLANCE D. On a switching control scheme for nonlinear systems with ill-defined relative degree [J]. *Systems & Control Letters*, 2002, 47(2): 159 – 166.

[11] JADBABAIE A, LIN J, MORSE A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988 – 1001.

[12] 程代展,陈翰馥. 从群集到社会行为控制[J]. 科技导报, 2004, (8): 4 – 7.
(CHENG D, CHENG H F. From swarm to social behavior control [J]. *Science & Technology Review*, 2004, (8): 4 – 7.)

[13] LIBERZON D, HESPANHA J P, MORSE A S. Stability of switched systems: a Lie-algebraic condi-tion [J]. *Systems & Control Letters*, 1999, 37(3): 117 – 122.

[14] SUN Z, GE S S. Analysis and synthesis of switched linear control systems [J]. *Automatica*, 2005, 41(2): 181 – 356.

[15] BDONDEL V, MEGRETSKI A. *Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory* [M]. New Jersey: Princeton University Press, 2004.

[16] DAYAWANSA W P, MARTIN C F. A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 44(4): 751 – 760.

[17] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.

[18] MASON O, SHORTEN R. A conjecture on the existence of common quadratic Lyapunov functions for positive linear systems [C] // *Proc of 2003 American Control Conference*. Dener, Colorado: AACC Press, 2003, 5: 4469 – 4470.

[19] CHENG D. An algorithm for common quadratic Lyapunov function [C] // *Proc of the 3rd World Congress on Intelligent Control and*

Automation. Hefei: [s. n.], 2000, 4: 2965 - 2969.

[20] CHENG D. On Lyapunov mapping and its applications [J]. *Communications in Information and Systems*, 2001, 1(3): 255 - 272.

[21] MORSE A S. *Control Using Logic-Based Switching* [M]. London: Springer-Verlag, 1997.

[22] WILLIANS S M, HOFT R G. Adaptive frequency domain control of PM switched power line conditioner [J]. *IEEE Trans on Power Electronics*, 1991, 6(10)665 - 670.

[23] MANCILLA-AGUILAR J L, GARCIA R A. On converse Lyapunov theorems for ISS and iISS switched nonlinear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 42: 47 - 53.

[24] Sira-RANIREZ. Nonlinear P - I controller design for switch mode de to dc power converters [J]. *IEEE Trans on Circuits System*, 1991, 38(4): 410 - 417.

[25] SHORTEN R N, NARENDRA K S, MASON O. A result on common quadratic Lyapunov functions [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(1): 618 - 621.

[26] MOSCA E. Predictive switching supervisory control of persistently disturbed input-saturated planets [J]. *Automatica*, 2005, 394(1): 91 - 107.

[27] LI Z G, WEN C Y, SOH Y C. Observer-based stabilization of switching linear systems [J]. *Automatica*, 2003, 39(3): 517 - 524.

[28] AGRACHEV A A, LIBERZON D. Lie-algebraic stability criteria for switched systems [J]. *SIAM J of Control Optimitation*, 2001, 40(1): 253 - 269.

[29] CHENG D, GUO L, HUAN J. On quadratic lyapunov functions [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(5): 885 - 890.

[30] XIE D, XIE G, WANG L. Complete characterization of quadratic Lyapunov functions for planar discrete systems [J]. *Communication in Nonlinear Science and Numerical simulation*, 2004, 9(4): 405 - 416.

[31] KHALIL H K. *Nonlinear Systems* [M]. 2nd ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

[32] LIBERZON D, MORSE A S. Basic problems on stability and design of switched systems [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, 19(5): 59 - 70.

[33] LIU Y, PASSINO K M, POLYCARPON M M. Stability analysis of M-dimensional asynchronous swarms with a fixed communication topology [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(1): 76 - 95.

[34] MANCILLA-AGUILAR J L, GARCIA R A. A converse Lyapunov theorem for nonlinear switched systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 41(1): 67 - 71.

[35] THATHACHAR W, VISWANATH P. On the stability of fuzzy systems [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1997, 5(1): 145 - 151.

[36] LIBERZON D, TEMPO R. Common Lyapunov function and gradient algorithm [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(6): 990 - 994.

[37] MANCILLA-AGUILAR J L. A condition for the stability of switched nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(1): 2077 - 2079.

[38] YEDAVALLI R K. Conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function via stability analysis of matrix families [C] // *Proc of Ameritan Control Conference*. Anchorage, Alaska: AACC Press, 2002: 1296 - 1301.

[39] SUN Z, GE S S, LEE T H. Controllability and reachability criteria for switched linear systems [J]. *Automatica*, 2002, 38: 775 - 786.

[40] CHENG D. Stabilization of planar switching systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2004, 51(2): 79 - 88.

[41] ZHAO J, SPONG M W. Hybrid control for global stabilization of the cart-pendulum systems [J]. *Automatica*, 2001, 37(12): 1941 - 1951.

[42] HESPANHA J P. Uniform stability of switched linear systems: extensions of LaSalle's invariance principle [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(4): 470 - 482.

[43] BRANICKY M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(4): 475 - 482.

[44] CAINES P E, ZHANG J. On the adaptive control of jump parameter systems via nonlinear fltering [J]. *SIAM J of Control Optimization*, 1995, 33(6): 1758 - 1777.

[45] XU X, ANTSAKLIS P J. Optimal control of switched systems based on parameterization of the switching instants [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(1): 2 - 16.

[46] CHENG D, GUO L, LIN Y, et al. Stabilization of switched linear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(8): 1224 - 1228.

[47] COHEN N, LEWKOWICZ I, RODMAN L. Exponential stability of triangular differential inclusion systems [J]. *Systems & Control Letters*, 1997, 30(4): 159 - 164.

[48] XUE F, GUO L. Necessary and sufficient conditions for adaptive stabilizability of jump linear systems [J]. *Communications in Information and Systems*, 2001, 1(2): 205 - 224.

[49] SHORTEN R N, NARENDRA K S. On common quadratic Lyapunov functions for pairs of stable LTI systems whose system matrices are in companion form [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(1): 110 - 113.

[50] GE S S, SUN Z, LEE T H. Reachability and controllability of switched linear discrete-time systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(9): 1437 - 1441.

[51] SUN Z, ZHENG D. On Reachability and stabilization of switched linear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(2): 291 - 295.

[52] XIE G, WANG L. Controllability and stabilization of switched linear-systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2003, 48(2): 135 - 155.

[53] CHENG D, CHENG H. Accessibility of switched linear systems [C] // *Proc of the 42nd IEEE Conf on Decision and Control*. Mauii, Hawaii: IEEE Press, 2003: 5759 - 5764.

[54] CHENG D. Controllability of switched bilinear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(4): 505 - 511.

[55] BENGEA S C. DeCARLO R A. Optimal control of switching systems [J]. *Automatica*, 2005, 41(1): 11 - 27.

[56] LIN Y, SONTAG E D. WANG Y. A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability [J]. *SIAM J of Control Optimization*, 1996, 34: 124 - 160.

[57] NARENDRA K S, BALAKRISHNAN J. Adaptive control using multiple models [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 41(10): 171 - 187.

[58] HUMPHREYS J E. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1972.

[59] CHENG D, HU X, WANG Y. Non-regular feedback linearization of nonlinear systems via a normal form algorithm [J]. *Automatica*, 2004, 40(3): 439 – 447.

[60] GILMORE R. *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications* [M]. New York: John Wiley, 1974.

[61] XIE G, WANG L. Necessary and sufficient conditions for controllability and observability of switched impulsive control systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(6): 960 – 966.

[62] ZHAO J, DIMIROVSKI G M. Quadratic stabilization of switched nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(4): 574 – 578.

[63] SUN Z, GE S S. Analysis and synthesis of switched linear control systems [J]. *Automatica*, 2005, 41(2): 181 – 356.

附录(Appendix):

附录 1 给定一个 Lie-代数 L, 定义一族导出 Lie-代数如下:

$$L^{(0)} := L,\quad L^{(k+1)} := [L^{(k)}, L^{(k)}],\ k \geqslant 0. \tag{A1}$$

定义 a.1[58] Lie-代数称为可解的, 如果存在 $k^* > 0$ 使得 $L^{(k^*)} = \{0\}$, 设 $x \in L$, x 的一个共轭表现记作 $ad_x: L \to L$, 它是一个线性映射, 定义为

$$ad_x(y) = [x, y],\ \forall y \in L. \tag{A2}$$

Killing 型是 Lie-代数研究的一个基本工具. 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为 Lie-代数 L 的一个基, 则 ad_x 在这个基下可表示为一个 $n \times n$ 矩阵.

定义 a.2[58] Killing 型是一个线性映射, 定义为

$$K(x, y) = \mathrm{tr}(ad_x ad_y),\ \forall x, y \in L. \tag{A3}$$

记

$$ad_{e_i} e_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_{ij}^{k} e_k,$$

则可定义结构矩阵 M 为

$$M := \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{11}^1 \\ \vdots \\ \mu_{11}^n \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} \mu_{1n}^1 \\ \vdots \\ \mu_{1n}^n \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{pmatrix} \mu_{n1}^1 \\ \vdots \\ \mu_{n1}^n \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} \mu_{nn}^1 \\ \vdots \\ \mu_{nn}^n \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \tag{A4}$$

那么如果记 $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i := (x_i, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 及 $y = \sum_{i=1}^{m} y_i e_i := (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$, 则

$$ad_x y = x^{\mathrm{T}} \ltimes M \ltimes Y. \tag{A5}$$

这里 $\ltimes$ 为矩阵的左半张量积[59]. 因为它是矩阵普通积的推广, 下面省去乘法记号. 定义

$$MM^{\mathrm{T}} := \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix},$$

这里 K_{ij} 是 $n \times n$ 块. 那么 Killing 矩阵可定义为

$$K = \begin{bmatrix} \mathrm{tr}(K_{11}) & \cdots & \mathrm{tr}(K_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{tr}(K_{n1}) & \cdots & \mathrm{tr}(K_{nn}) \end{bmatrix}. \tag{A6}$$

下面的定理可用于检验可解性:

定理 a.3[60] 一个 Lie-代数可解, 当且仅当它的 Killing 矩阵为 0, 即 $K = 0$;

定理 a.4 一个 Lie-代数是半单的, 如果它不包含非零可解理想;

定理 a.5[60] 一个 Lie-代数是半单的, 当且仅当它的 Killing 矩阵非奇异;

定理 a.6[60] 设为一 Lie-代数, 则它可分解为

$$L = S \oplus R. \tag{A7}$$

这里: S 是一个半单子代数, R 是 L 的根, 即它的最大可解理想, 故 $[S, R] \subset R$. 式(a.7)称 L 为的 Levi 分解.

注意 Killing 矩阵依赖于基底, 证明定理 a.5, a.6 与基底无关. 记一个新基底为

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (e_1, e_2, \cdots, e_n)A.$$

这里 A 为非奇异 $n \times n$ 矩阵. 则在新坐标下结构矩阵为

$$\tilde{M} = (A^{\mathrm{T}} \otimes A^{-1})MA,$$

由此可证

$$\tilde{K} = A^{\mathrm{T}} K A. \tag{A8}$$

结论显见.

定义 a.7 一个 Lie-代数是紧的, 如果它的 Killing 矩阵负定.

由式(A8)可知定义 a.7 与基底无关.

附录 2

定义 a.8 1) 一个函数 $\alpha: [0, \infty] \to \mathbb{R}$ 称为 K 函数, 如果 ① $\alpha(0) = 0$; ② $\alpha(t)$ 是严格增的;

2) 一个 K 函数 $\alpha(t)$ 称为 K_∞ 的如果 $\alpha(t) \to +\infty$, $(t \to +\infty)$;

3) 一个函数 $\xi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 称为 L 函数如果 $\xi(t)$ 连续, 严格降, 且 $\xi(t) \to 0\ (t \to +\infty)$;

4) 一个函数 $\beta(r, t): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 称为 KL 的, 如果对固定的 t, $\beta(\cdot, t)$ 是 K_∞ 函数且对固定的 r, $\beta(r, \cdot)$ 是 L 函数.

作者简介:

程代展 (1946—), 男, 中国科学院系统科学研究所研究员, 1970 年毕业于清华大学, 1985 年获美国华盛顿大学博士学位, 研究兴趣为非线性系统、切换系统、哈密顿系统的控制理论, E-mail: dcheng@mail.iss.ac.cn;

郭宇骞 (1973—), 男, 中国科学院系统科学研究所博士研究生, 1995 年毕业于长沙大学物理系, 2000 年获湖南师范大学数学系理学硕士学位, 研究兴趣为非线性系统、哈密顿系统、鲁棒控制.