第 33 卷第 3 期　　数学的实践与认识　　Vol. 33 No. 3
2003 年 3 月　　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　　March, 2003

弹性弦 Dirichlet 边界反馈控制的镇定与 Riesz 基生成

谢　宇,　郭宝珠

(中国科学院数学与系统科学研究院, 北京　100080)

摘要:　本文通过一端固定, 一端 Dirichlet 边界控制的一维波动方程说明系统是 Salamon-Weiss 意义下适定和正则的. 由此说明, 由 J. L. Lions 引入的用于研究双曲方程精确可控性的 Hilbert 唯一性方法是控制论中著名的对偶原理. 我们讨论了系统的指数镇定及闭环系统的广义本征函数生成 Riesz 基和谱确定增长条件. 我们希望通过本文使读者对目前线性偏微分控制理论的一个新动向有一基本的了解.

关键词:　分布参数控制; Riesz 基; 谱确定增长条件; 稳定性; 正则性; 适定性

1　引言及适定正则系统

一般说来, 线性偏微分控制系统可以写成如下的抽象系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \in \mathbf{H}, \\ y(t) = \mathcal{C}x(t). \end{cases} \tag{1}$$

这里 $\mathcal{A}$ 是 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 上的 C_0-半群的生成元, B 是控制 Hilbert 空间 U 到状态空间 $\mathbf{H}$ 的算子, $\mathcal{C}$ 是状态空间 $\mathbf{H}$ 到输出 Hilbert 空间 Y 的算子. 当 B, $\mathcal{C}$ 都为有界算子时, 系统(1)的表示理论, 传递函数, 反馈, 动态镇定, 抗扰跟踪等有非常相似于有穷维系统的推广(例如见[4]). 但当 B, $\mathcal{C}$ 都为无界算子时, 到目前为止, 关于系统(1)的相应理论的最广泛发展是过去二十年来在 Salamon-Weiss 框架下发展的适定, 正则系统理论.

设 $\mathbf{H}_+ = [D(\mathcal{A})]$. 任取 $\beta \in \rho(\mathcal{A})$, 定义 $\mathbf{H}_-$ 为 $\mathbf{H}$ 关于范数

$$\| \cdot \|_- = \| (\beta_0 - \mathcal{A})^{-1} \cdot \|$$

的完备化 Hilbert 空间. [12]指出 $\mathbf{H}_-$ 等价于图象 Hilbert 空间 $[D(\mathcal{A}^*)]$ 的对偶空间 $[D(\mathcal{A}^*)]'$. 这里 $\mathcal{A}^*$ 表示 $\mathcal{A}$ 的对偶算子. 对任意的 $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, $R(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda - \mathcal{A})^{-1}$ 在 $\mathbf{H}_-$ 中有自然延拓 $\tilde{R}(\lambda, \mathcal{A})$: $\mathbf{H}_- \to \mathbf{H}$. 当 $x \in \mathbf{H}$ 时, $\tilde{R}(\lambda, \mathcal{A})x = R(\lambda, \mathcal{A})x$. 自然 $\mathcal{A}$ 可以扩充到整个 $\mathbf{H}$

$$\langle \mathcal{A}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{A}^* y \rangle, \text{ 对任意的 } x \in \mathbf{H},\ y \in D(\mathcal{A}^*).$$

$\mathcal{A}$ 为 $\mathbf{H}$ 到 $\mathbf{H}_-$ 的等距同构. 由[12]中命题 3.3, 对任意 $L \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, L 与 $\mathcal{A}$ 可交换, L 在 $\mathbf{H}_-$ 中有扩张 $\tilde{L}$:

$$\tilde{L} = R(\beta_0, \mathcal{A})^{-1} L \tilde{R}(\beta_0, \mathcal{A}).$$

Salamon-Weiss 适定系统要求 $B \in \mathcal{L}(U, \mathbf{H}_-)$, $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_+, Y)$.

引进投影算子: $\mathbb{P}_\tau$: $L^2_{loc}(0, \infty; U) \to L^2(0, \tau; U)$:

$$(\mathbb{P}_\tau u)(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, \tau), \\ 0, & t \geq \tau, \end{cases} \quad \forall u \in L^2_{loc}(0, \infty; U). \tag{2}$$

收稿日期: 2002-10-31
基金项目: 国家自然科学基金项目资助(60174008)

则系统(1)可以写为:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \mathbb{P}_t y \end{pmatrix} = \Sigma \begin{pmatrix} x_0 \\ \mathbb{P}_t u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\mathbb{A}t} & \int e^{\mathbb{A}(t-s)} B \\ \mathbb{C} e^{\mathbb{A}t} & \mathbb{F}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \mathbb{P}_t u \end{pmatrix} \tag{3}$$

其中 $\mathbb{F}_t$ 称为输入输出映射.

当对某一 $t > 0$ (因此对所有的 $t > 0$) 及所有的 $u \in L^2(0, t)$, 总有 $\int e^{\mathbb{A}(t-s)} B u(s) \mathrm{d}s \in \mathbf{H}$, 则称 $B \in \mathbf{L}(U, \mathbf{H}_-)$ 是容许的(相对于系统的 C_0-半群 $e^{\mathbb{A}t}$). [12]证明 B 容许当且仅当存在 $C_t > 0$, 使对所有的 $u \in L^2(0, t)$,

$$\left\| \int e^{\mathbb{A}(t-s)} B u(s) \mathrm{d}s \right\|_{\mathbf{H}}^2 \leq C_t \int \| u(s) \|_U^2 \mathrm{d}s, \tag{4}$$

即当初始值为 0 时, 状态对控制是连续依赖的. B 的相容性保证当 $x_0 \in \mathbf{H}$, $u \in L^2(0, t; U)$ 时, 系统

$$\begin{cases} \mathring{x}(t) = \mathbb{A} x(t) + B u(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{5}$$

的轨线 $x(t) = e^{\mathbb{A}t} x_0 + \int e^{\mathbb{A}(t-s)} u(s) \mathrm{d}s$ 仍然在 $\mathbf{H}$ 中, 而不是将(1)理解为 $\mathbf{H}_-$ 中的系统:

$$\begin{cases} \mathring{x}(t) = \mathbb{A} x(t) + B u(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{6}$$

虽然后者总是可行的, 但在许多物理系统中, 正是 $\| x(t) \|_{\mathbf{H}}$ 而不是 $\| x(t) \|_{\mathbf{H}_-}$ 代表了系统的能量. 而且, 当 B 容许时, 可能出现的情况是, 系统(5)在 $\mathbf{H}$ 中是精确可控的, 而系统(6)在 $\mathbf{H}_-$ 中不是精确可控的.

再来看输出算子. 当控制为 0 时, 由于 $\mathbb{C} \in \mathbf{L}(\mathbf{H}_+, Y)$, 输出 $y(t) = \mathbb{C} e^{\mathbb{A}t} x_0$ 只对 $x_0 \in D(\mathbb{A})$ 有意义. 为对所有的 $x_0 \in \mathbf{H}$, 输出 $y(t) = \mathbb{C} e^{\mathbb{A}t} x_0$ 有确定的意义且连续依赖于初值 x_0, Salamon-Weiss 适定系统要求 $\mathbb{C}$ 是容许的: 即对某一 $t > 0$ (因此对所有的 $t > 0$) 存在 $D_t > 0$

$$\int \| y(t) \|_Y^2 \mathrm{d}s \leq D_t \| x_0 \|_{\mathbf{H}}^2, \quad \forall x_0 \in \mathbf{H} \tag{7}$$

最困难的是输入输出的关系. 虽然当控制为 0 时, $\mathbb{C}$ 的容许性保证了输出对初值的连续依赖性, 但当控制不为 0 时, 即令初值为 0, $\mathbb{C}$ 的容许性也保证不了输出对输入的连续依赖性. 而这一点需要引入传递函数才能完成.

定义 1　系统(1)称为 Salamon-Weiss 适定的, 如果 $B \in \mathbf{L}(U, \mathbf{H}_-)$, $\mathbb{C} \in \mathbf{L}(\mathbf{H}_+, Y)$ 关于半群 $e^{\mathbb{A}t}$ 是容许的, 且对某一 $t > 0$ (因此对所有的 $t > 0$) 存在 $E_t > 0$, 使得

$$\int \| y(s) \|_Y^2 \mathrm{d}s \leq E_t \int \| u(s) \|_U^2 \mathrm{d}s, \quad \forall u \in L^2(0, t; U) \tag{8}$$

即系统的输入输出有如上的连续依赖性.

依经典控制理论, 输入输出应有如下关系

$$\hat{y}(s) = H(s) \hat{u}(s), \text{ 对充分大的 } \mathrm{Re}\, s. \tag{9}$$

其中 ^ 表示 Laplace 变换, $H(s)$ 称为系统(1)的传递函数, $H(s)$ 当 $\mathrm{Re}\, s > \alpha \in \mathbb{R}$ 时是解析的. 在频域中, (8)等价于传递函数在某个右半平面一致有界或存在 $\beta > \alpha$ ([6]), 使得

$$\sup_{\mathrm{Re}s=\beta}\|H(s)\|_{\mathbf{L}(U,Y)}<\infty. \tag{10}$$

需要说明的是, 对许多偏微分控制系统来说, 验证(8)**比**(10)**更容易. 利用传递函数, 输入输出映射可写为**([5]):

$$(F_t u)(s)=\mathbb{C}_\Lambda\left[\int e^{\mathbb{A}(s-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau-(\beta-\mathbb{A})^{-1}Bu(s)\right]$$

$$+H(\beta)u(s),\quad s\in[0,t] \tag{11}$$

其中 $\mathbb{C}_\Lambda$ **称为** $\mathbb{C}$ **的** Λ **扩张**:

$$\mathbb{C}_\Lambda x_0=\lim_{\lambda\to\infty}\mathbb{C}\lambda(\lambda-\mathbb{A})^{-1}x_0, \tag{12}$$

如果极限存在.

可惜的是, 仅只 $(\mathbb{A},B,\mathbb{C})$ **并不能唯一确定传递函数, 而只能唯一确定** $H(s)$ **的导数** $H'(s)$ (**见**[13]).

$$\frac{H(s)-H(\beta)}{s-\beta}=-\mathbb{C}(s-\mathbb{A})^{-1}(\beta-\mathbb{A})^{-1}B. \tag{13}$$

定义 2　系统(1)**称为** Salamon-Weiss **正则的, 如果**(1)**为适定的, 且**

$$\lim_{s\to+\infty}H(s)u=Du,\qquad\forall u\in U \tag{14}$$

算子 $D\in\mathbf{L}(U,Y)$ **称为直接传输算子.**

对正则系统来说, $(\mathbb{A},B,\mathbb{C})$ **可唯一确定传递函数. 此时,**

$$H(s)=\mathbb{C}_\Lambda(s-\mathbb{A})^{-1}B+D, \tag{15}$$

且系统(1)**的正确写法应为**([5]):

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\mathbb{A}x(t)+Bu(t),\ x(0)=x_0\in H,\\ y(t)=\mathbb{C}_\Lambda x(t)+Du(t).\end{cases} \tag{16}$$

对具体的偏微分系统来说, 确定其正则适定性并非易事, 虽然一般相信有物理背景的系统应是正则适定系统.

我们说系统(5)**是精确可控的, 如果对任意的** $x_0,x_1\in\mathbf{H}$, **存在** $T>0$, $u\in L^2(0,T;U)$ **使得** $x(0)=x_0$, $x(T)=x_1$. **如果** $\mathbb{A}$ **生成** C_0**-群, 则在定义中可取** $x_1=0$. **对正则系统来说, 控制论中著名的对偶原理仍然成立:** $(\mathbb{A},B)$ **在** $[0,T]$ **上精确可控等价于** $(-\mathbb{A}^*,B^*)$ **在** $[0,T]$ **上精确可观**([10]), **即存在** $C_T>0$ **使得**

$$\int_0^T\|B^*e^{-\mathbb{A}^*t}z_0\|^2\mathrm{d}t\geq C_T\|z_0\|^2,\ \forall z_0\in Y. \tag{17}$$

上式称为可观测不等式. 数学上(17)**表达了方程** $\dot{z}(t)=-\mathbb{A}^*z(t)$, $z(0)=z_0$ **的解的一种性质, 所以是个数学问题. 利用**(17), **我们可以完全构造出将状态空间任意点驱向** 0 **的控制** u. **事实上, 如果**(17)**成立, 取** $u^*(t)=B^*e^{-\mathbb{A}^*t}z_0\in L^2(0,T)$. **解方程**

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\mathbb{A}x(t)+Bu^*(t),\\ x(T)=0,\quad x(0)=x_0.\end{cases} \tag{18}$$

方程(18)**两边对** z **取内积, 可得**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x(t),z(t)\rangle=\langle u^*(t),B^*z(t)\rangle.$$

上式两端从 0 **到** T **积分得**

$$\langle -x_0,z_0\rangle=\int_0^T\|B^*z(t)\|^2\mathrm{d}t\geq C_T\|z_0\|^2.$$

定义

$$\Lambda z_0 = -x_0,$$

则

$$\langle \Lambda z_0, z_0\rangle \geq C_T \| z_0 \|^2.$$

由 Lax-Milgram 定理, 算子 Λ 是 $\mathbf{H}'$ 和其对偶空间 $\mathbf{H}$ 的等距同构. 所以, 对任意的 $x_0 \in \mathbf{H}$, 取 $z_0 = -\Lambda^{-1}x_0$, 则(18)的解满足 $x(T) = 0$, 即系统(5)在 $\mathbf{H}$ 中 $[0, T]$ 上精确可控, 其中 $u^*(t)$ 意义如前所述. 不难证明, 如此选取的控制 $u^*(t)$ 具有最小的 L^2 范数, 既系统(5)对 $u \in L^2(0, T; U)$ 的任意满足 $x(T) = 0$ 的解, 总有

$$\int_0^T \| u^*(t) \|^2 \mathrm{d}t \leq \int_0^T \| u(t) \|^2 \mathrm{d}t.$$

这就是 Lions 的 Hilbert 唯一性方法([9]). 当然控制系统(5)的对偶系统不仅仅是 $(-A^*, B^*)$. 任意有界可逆变换 $T: \mathbf{H}' \to \mathbf{E}$ 生成的系统 $(-TA^*T^{-1}, B^*T^{-1})$, $\mathbf{E}$ 为另一 Hilbert 空间, 都可称为系统(5)的对偶系统. 这一点在应用中异常重要.

本文的目的是通过一个一端固定, 一端 Dirichlet 边界控制的一维波动方程说明系统是 Salamon-Weiss 意义下适定和正则的. 由此进一步说明, 用于研究双曲系统精确可控的 Hilbert 唯一性方法恰是对偶原理. 第三节, 我们讨论了系统的指数镇定及闭环系统的广义本征函数生成 Riesz 基和谱确定增长条件. 我们希望通过本文使读者对目前线性偏微分控制理论研究的一个新的动向有一基本的了解.

2 一维波动方程的适定性, 正则性及其精确可控性

考虑如下的一端固定, 一端 Dirichlet 边界控制的一维波动方程:

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) - w_{xx}(x, t) = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ w(0, t) = 0, \\ w(1, t) = u(t). \end{cases} \tag{19}$$

我们逐步将(19)化为[6]讨论的二阶双曲系统的形式从而利用[6]的已知结论, 虽然二阶系统总可化为上一节讨论的一阶系统. 设 $H = H^{-1}(0, 1)$ 为 Sobolev 空间 $H_0^1(0, 1)$ 的对偶空间. 设 A 是 H_0^1 上的双线性型产生的 H 上的自伴算子:

$$\langle Af, g\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} = a(f, g) = \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}\mathrm{d}x, \quad \forall f, g \in H_0^1(0, 1). \tag{20}$$

由 Lax-Milgram 定理, A 是 $D(A) = H_0^1$ 到 H^{-1} 的等距同构. 容易证明对任意的 $f \in H^2 \cap H_0^1$, $Af = -\Delta f = -f''$, 这里 $-\Delta$ 是通常的 Laplace 算子. 且对任意的 $g \in L^2(0, 1)$, $A^{-1}g = (-\Delta)^{-1}g$. 所以 A 是通常的 Laplace 算子在空间 $H_0^1(0, 1)$ 的延拓.

注意 $D(A^{1/2}) = L^2(0, 1)$. 将 H 与 H' 等同, 则有 $[D(A^{1/2})] \subset H \subset [D(A^{1/2})]'$. A 有自然延拓 $\tilde{A} \in \mathbf{L}([D(A^{1/2})], [D(A^{1/2})]')$:

$$\langle \tilde{A}f, g\rangle_{[D(A^{1/2})]'\times[D(A^{1/2})]} = \langle A^{1/2}f, A^{1/2}g\rangle_{H\times H}, \quad \forall f, g \in L^2(0, 1). \tag{21}$$

(19)可写为

$$w_{tt}(\cdot, t) + A[w(\cdot, t) - xu(t)] = w_{tt}(\cdot, t) + \tilde{A}w(\cdot, t) - u(t)\tilde{A}x = 0. \tag{22}$$

令

$$Bu = -u\tilde{A}x \in [D(A^{1/2})]'. \tag{23}$$

于是(22)成为[6]讨论的 H 上的二阶双曲系统

$$w_{tt}(\cdot, t) + Aw(\cdot, t) + Bu(t) = 0. \tag{24}$$

其中控制空间为一维的: $U = \mathbf{C}$.

从[6]知道, 系统(24)的指数镇定与系统的精确可控性密切相关. 系统(24)的反馈镇定控制是当然的同位输出反馈: $u(t) = B^* w_t$. 即系统(24)的输出为:

$$y(t) = B^* w_t. \tag{25}$$

B^* 为 $D(A^{1/2}) = L^2(0, 1)$ 到输出空间 $Y = U$ 的有界线性算子.

$$\langle B^* f, u\rangle = \langle f, Bu\rangle_{[D(A^{1/2})]\times[D(A^{1/2})]'} = \langle A^{-1/2} f, A^{-1/2} Bu\rangle_{L^2\times L^2}$$

$$= -u\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall f \in L^2(0, 1). \tag{26}$$

所以

$$B^* f = -\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall f \in L^2(0, 1). \tag{27}$$

[6]证明, 如果 B 是容许的, 则系统(24), (25)的传递函数为

$$H(s) = sB^*(s^2 + \tilde{A})^{-1}B. \tag{28}$$

$H(s)$ 在右半平面解析. [13]和[11]证明, 如果存在 $\beta > 0$ 使得

$$\sup_{\mathrm{Re}\, s = \beta} \| H(s) \| < \infty, \tag{29}$$

则 B 在状态空间 $\mathbf{H} = D(A^{1/2}) \times H = L^2 \times H^{-1}$ 中是容许的, 因而系统(24), (25)是适定的.

现在我们来求传递函数. 对任意的 $u \in \mathbf{C}$, 令 $p = (s^2 + \tilde{A})^{-1}Bu$, 则 p 满足

$$\begin{cases} s^2 p(x) - p''(x) = 0, & x \in (0, 1), \\ p(0) = 0, & p(1) = u. \end{cases} \tag{30}$$

解方程(30), 得

$$p(x) = \frac{\mathrm{e}^{sx} - \mathrm{e}^{-sx}}{e^{s} - e^{-s}} u.$$

于是由(27),

$$H(s)u = sB^*(s^2 + \tilde{A})^{-1}Bu = \left(-\frac{\mathrm{e}^{s} + \mathrm{e}^{-s}}{\mathrm{e}^{s} - \mathrm{e}^{-s}} + \frac{1}{s}\right) u. \tag{31}$$

所以(29)满足, 且

$$\lim_{s\to+\infty} H(s)u = -u, \quad \forall u \in U = \mathbf{C}. \tag{32}$$

于是我们证明了下面的定理.

定理 1　系统(24), (25)是在状态空间 $\mathbf{H}$, 输入空间 $U = \mathbf{C}$, 输出空间 $Y = \mathbf{C}$ 的适定, 正则系统, 且直接传输算子 $D = -I$.

我们猜测一般高维波动方程在部分 Dirichlet 边界控制条件下的同位输出系统都具有定理 1 的结论. 适定性已在[1]中得证. 对区域为二维的圆, 我们证明了正则性[7].

下面我们来看系统(24)的精确可控性. 由于系统(24), (25)是同位系统, 由对偶原理, (24)的精确可控性等价于下面系统的精确可观性

$$\begin{cases} w_{tt}(\cdot, t) + Aw(\cdot, t) = 0, \\ y(t) = B^* w_t. \end{cases} \tag{33}$$

从(27)看, 系统(33)的输出需要量测系统的每一点的速度 首先我们将(33)化为一阶系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix}, \\ y(t) = (0, B^*)\begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{34}$$

做 $\mathbf{H} = L^2 \times H^{-1}$ 到 $H_0^1 \times L^2$ 的等距同构变换:

$$T\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -A^{-1} \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^{-1}g \\ f \end{pmatrix} \in H_0^1 \times L^2, \ \forall (f, g) \in L^2 \times H^{-1}. \tag{35}$$

则

$$T\mathcal{A}T^{-1} = \mathcal{A}, \ (0, B^*)T^{-1} = (-B^*A, 0).$$

注意当 $f \in H^2 \cap H_0^1$ 时, $Af = -f''(x)$, 因此

$$-B^*Af = f'(1).$$

于是考察系统(33)在 H 中的精确可观性等价于在空间 $\mathbb{H} = H_0^1 \times L^2$ 中考察系统

$$\begin{cases} w_{tt}(\cdot, t) - \Delta w(\cdot, t) = 0, \\ y(t) = w_x(1, t), \end{cases} \tag{36}$$

的精确可控性 这就是为什么 Lions 在[9]中研究高维波动方程 Dirichlet 边界控制系统

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) - \Delta w(x, t) = 0, \ x \in \Omega, \ t > 0, \\ w(x, t) = 0, \ x \in \Gamma_0, \ t > 0, \\ w(x, t) = u(x, t), \ x \in \Gamma_1, \ t > 0, \end{cases} \tag{37}$$

的精确能控性时, 这里 $\Omega \subset R^n$, $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$, Γ_0 和 Γ_1 不相交, $\mathrm{int}(\Gamma_1) \neq \emptyset$, 在空间 $\mathbb{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 中考察系统

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) - \Delta w(x, t) = 0, \ x \in \Omega, \ t > 0, \\ w(x, t) = 0, \ x \in \partial\Omega, \ t > 0, \\ y(t) = \dfrac{\partial}{\partial n} w \Big|_{\Gamma_1}, \end{cases} \tag{38}$$

其中 n 表示外法向量, 的精确能观性的原因 显然, 比起(33)观测系统在整个空间的速度来, (36)只需观测系统在 $x = 1$ 的应力, 是一个点观测的问题

建立系统(36)或(38)在空间 $\mathbb{H}$ 中的可观性不等式是一个简单的问题, [9]中已有详细的讨论 为完整起见, 我们给出对(36)的一个简单证明 令

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 [w_t^2(x, t) + w_x^2(x, t)]\mathrm{d}x.$$

$E(t)$ 为系统(36)的能量, 也即状态变量 (w, w_t) 在 $\mathbb{H}$ 中的范数, $E(t) = E(0)$, $\forall t \geq 0$. 对(36)的第一个方程两边同乘 xw_x 并从 0 到 1 积分, 得

$$0 = \int_0^1 [xw_xw_{tt} - xw_xw_{xx}]\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 xw_xw_t\mathrm{d}x - \frac{1}{2}w_x^2(1, t) + E(t). \tag{39}$$

所以存在常数 $C_T > 0$ 使得

$$\int_0^T w_x^2(1, t)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 xw_xw_t\mathrm{d}x \Big|_0^T + 2\int_0^T E(t)\mathrm{d}t \leq C_TE(0).$$

即 $w_x(1, t) \in L^2(0, T)$, $\forall T > 0$. 这个事实称为方程(36)的隐性正则性(hidden-regulartiy). 从(39), 我们可得可观性不等式:

$$E(0) \le \frac{1}{2(T-2)}\int_0^T w_x^2(1,t)\,\mathrm{d}t,\quad \forall T > 2$$

所以系统(36)在任意 $[0, T]$, $T > 2$ 上精确可观. 这个事实从特征线容易理解: 初值当至少反射一次后控制才起作用, 所以 $T = 2$ 是最小的使系统(36)可观测的时间.

3　Riesz 基生成

本节我们考察系统(24), (25)在输出反馈 $u(t) = ky(t)$ 下闭环系统

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ w(0,t) = 0, \\ w(1,t) = -k\int_0^1 x w_t(x,t)\,\mathrm{d}x \end{cases} \tag{40}$$

在空间 $\mathbf{H} = L^2 \times H^{-1}$ 中的 Riesz 基生成.

由第二节知, (20)定义的自伴算子 A 是通常的 Laplace 算子在 $H_0^1(0,1)$ 中的延拓, 且是 $H_0^1(0,1)$ 到 $H^{-1}(0,1)$ 的等距同构. 经计算知, 对任意 $f \in L^2(0,1)$,

$$A^{-1}f = \int\int f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}y - x\int\int f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}y. \tag{41}$$

$\mathbf{H}$ 中的内积定义为

$$\langle (f_1, g_1), (f_2, g_2)\rangle_{\mathbf{H}} = \langle f_1, f_2\rangle_{L^2(0,1)} + \langle A^{-1}g_1, A^{-1}g_2\rangle_{H_0^1(0,1)},$$
$$\forall (f_1, g_1), (f_2, g_2) \in \mathbf{H}. \tag{42}$$

在 $\mathbf{H}$ 中定义线性算子 $\mathcal{A}$

$$\begin{cases} \mathcal{A}(f,g) = (g, f''), \quad \forall (f,g) \in (D(\mathcal{A})), \\ D(\mathcal{A}) = \{(f,g) \in L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1) \mid f(0) = 0,\ f(1) = -k\int_0^1 x g(x)\,\mathrm{d}x \\ \qquad\qquad (g, f'') \in L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)\}. \end{cases} \tag{43}$$

则系统(40)可化为 $\mathbf{H}$ 中的抽象发展方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix}, \quad \forall x \in [0,1],\ t > 0. \tag{44}$$

由[6], $\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{H}$ 中生成一 C_0-压缩半群.

现在我们来求系统(40)的特征值及特征函数. 设 $\lambda \in C$, $(\phi, \psi) \in \mathbf{H}$, 满足

$$\mathcal{A}(\phi, \psi) = \lambda(\phi, \psi) \tag{45}$$

即

$$\begin{cases} \lambda^2\phi(x) - \phi''(x) = 0, \\ \phi(0) = 0,\ \phi(1) = -k\int_0^1 x\lambda\phi(x)\,\mathrm{d}x, \\ \psi(x) = \lambda\phi(x). \end{cases} \tag{46}$$

(46)有非零解当且仅当 λ 满足特征方程:

$$(1+k)\mathrm{e}^{\lambda} - (1-k)\mathrm{e}^{-\lambda} - \frac{k}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}) = 0. \tag{47}$$

设 $k \ne 1$. 因为 $\mathcal{A}$ 耗散, $\mathcal{A}$ 的特征值都在左半平面内, 所以 $\mathrm{e}^{2\lambda} - 1$ 对 λ 一致有界. 上式可化为

$$e^{2\lambda} = \frac{1-k}{1+k} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \text{当 } |\lambda| \to \infty \text{ 时.} \tag{48}$$

经计算当 $k > 0$, $k \neq 1$ 时, 闭环系统的特征值和特征函数分别为

$$\lambda_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\frac{1-k}{1+k} + n\pi i + O\left(\frac{1}{n}\right), & 0 < k < 1, \\ \frac{1}{2}\ln\frac{k-1}{k+1} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i + O\left(\frac{1}{n}\right), & k > 1, \end{cases} \tag{49}$$

$$F_n = \begin{pmatrix} \sinh\lambda_n x \\ \lambda_n \sinh\lambda_n x \end{pmatrix}, \quad n \in Z.$$

定理 2　对闭环系统(40), 下面的结论成立

(i) 当 $k > 0$, $k \neq 1$ 时, 存在 A 的一广义特征向量序列形成 H 中的一 Riesz 基. 因此对 A 所生成的 C_0 半群 e^{At}, 谱确定增长条件成立, 即 $\omega(A) = S(A)$, $\omega(A)$ 是 e^{At} 的增长界, $S(A)$ 是 A 的谱界. 相应的从对算子 A 的谱的估计式中, 我们还可看出存在 $\omega > 0$ 使得

$$\| e^{At} \|_H \leq M e^{-\omega t}, \tag{50}$$

即此闭环系统是指数镇定的.

(ii) 当 $k = 1$ 时, 系统的特征方程 $f(\lambda) = 2e^{\lambda} - \dfrac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{\lambda}$ 有可数无穷个零点.

证明　设空间 $V = \{u \in H^1(0,1) \mid u(0) = 0\}$, 其内积定义为

$$\langle f, g \rangle_V = \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}\,dx, \quad \forall f, g \in V. \tag{51}$$

设

$$\tilde{\lambda}_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\frac{1-k}{1+k} + n\pi i, & 0 < k < 1, \\ \frac{1}{2}\ln\frac{k-1}{k+1} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i, & k > 1. \end{cases} \tag{52}$$

由[14]

$$\tilde{F}_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\lambda}_n}\sinh\tilde{\lambda}_n x \\ \sinh\tilde{\lambda}_n x \end{pmatrix}_{n\in Z}, \tag{53}$$

是 $V \times L^2(0,1)$ 中的一 Riesz 基. 设

$$\tilde{E}_n = \begin{pmatrix} \dfrac{\sinh\tilde{\lambda}_n x - x\sinh\tilde{\lambda}_n}{\tilde{\lambda}_n} \\ \sinh\tilde{\lambda}_n x \end{pmatrix}_{n\in Z}, \tag{54}$$

作线性变换 $\tilde{T}$: $\tilde{T}\tilde{F}_n = \tilde{E}_n$,

$$\begin{aligned} \| \tilde{T}\tilde{F}_n \|^2_{H_0^1(0,1)\times L^2(0,1)} &= \int_0^1 \left(\left| \cosh\tilde{\lambda}_n x - \frac{\sinh\tilde{\lambda}_n}{\tilde{\lambda}_n} \right|^2 + \left| \sinh\tilde{\lambda}_n x \right|^2 \right) dx \\ &= \frac{\sinh 2Re\tilde{\lambda}_n}{2Re\tilde{\lambda}_n} \left(1 - \frac{2Re\tilde{\lambda}_n}{\sinh 2Re\tilde{\lambda}_n} \left| \frac{\sinh\tilde{\lambda}_n}{\tilde{\lambda}_n} \right|^2 \right). \\ &= \| \tilde{F}_n \|^2_{V\times L^2(0,1)} \left(1 - \frac{2Re\tilde{\lambda}_n}{\sinh 2Re\tilde{\lambda}_n} \left| \frac{\sinh\tilde{\lambda}_n}{\tilde{\lambda}_n} \right|^2 \right). \end{aligned} \tag{55}$$

$$\frac{2\mathrm{Re}\tilde{\lambda}_n}{\sinh 2\mathrm{Re}\tilde{\lambda}_n}\left|\frac{\sinh\tilde{\lambda}_n}{\tilde{\lambda}_n}\right|^2=\begin{cases}\dfrac{-2k\ln\frac{1-k}{k+1}}{\left(\ln\frac{1-k}{k+1}\right)^2+(2n\pi)^2}, & 0<k<1,\\[2ex] \dfrac{-2k\ln\frac{k-1}{k+1}}{\left(\ln\frac{k-1}{k+1}\right)^2+(2n+1)^2\pi^2}, & k>1.\end{cases}\tag{56}$$

其中 $n\in Z$. 从此式可以看出当 $k>0,\ k\neq 1$ 时有

$$0<\frac{2\mathrm{Re}\tilde{\lambda}_n}{\sinh 2\mathrm{Re}\tilde{\lambda}_n}\left|\frac{\sinh\tilde{\lambda}_n}{\tilde{\lambda}_n}\right|^2\leq\frac{2k}{\ln\left|\frac{1+k}{1-k}\right|}<1,\quad\forall n\in Z.\tag{57}$$

于是

$$\left(1-\frac{2k}{\ln\left|\frac{1+k}{1-k}\right|}\right)\|\tilde{F}_n\|^2_{V\times L^2(0,1)}\leq\|T\tilde{F}_n\|^2_{H^1_0(0,1)\times L^2(0,1)}\leq\left(1+\frac{2k}{\ln\left|\frac{1+k}{1-k}\right|}\right)\|\tilde{F}_n\|_{V\times L^2(0,1)},\quad\forall n\in Z.\tag{58}$$

由此知 T 为一有界可逆算子. 所以 $\{\tilde{E}_n\}_{n\in Z}$ 在 $H^1_0(0,1)\times L^2(0,1)$ 中形成一Riesz 基. 在(35)定义的 $H^1_0(0,1)\times L^2(0,1)$ 到 $\mathbf{H}$ 的等距同构变换下

$$T^{-1}\tilde{E}_n=\begin{pmatrix}0 & I\\ -A & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\sinh\tilde{\lambda}_n x-x\sinh\tilde{\lambda}_n}{\tilde{\lambda}_n}\\ \sinh\tilde{\lambda}_n x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sinh\tilde{\lambda}_n x\\ \tilde{\lambda}_n\sinh\tilde{\lambda}_n x\end{pmatrix}=E_n.\tag{59}$$

所以 $\{E_n\}_{n\in Z}$ 形成 $\mathbf{H}$ 中的一Riesz 基. 又因存在 $N>0$,

$$\sum_{|n|>N}\|E_n-F_n\|^2_{\mathbf{H}}=\sum_{|n|>N}O\left(\frac{1}{n^2}\right)<\infty.\tag{60}$$

由[8]定理6.3, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在空间 $\mathbf{H}$ 中形成一Riesz 基.

当 $k=1$ 时, 在(47)中令 $k=1$, 得系统(40)的特征方程为

$$f(\lambda)=2e^{\lambda}-\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{\lambda}.\tag{61}$$

易知 $f(\lambda)$ 为一阶整函数. 完全类似[15]第147 页引理3.2.4, 可证 $f(\lambda)$ 有无穷多个零点. 可惜的是我们不知道在这种情况下, 系统是否仍有Riesz 基生成抑或系统的广义特征函数在空间 $\mathbf{H}$ 中根本不完整. 这个特殊情况发生在一维波动方程的Neumann 边界控制中, 不过和(ii)不同的是, 那里的闭环算子的谱是空集([3]).

参考文献:

[1] Ammari K. Dirichlet boundary stabilization of the wave equation[J]. Asymptotic Analysis, 2002, 30(2): 117—130.

[2] Ammari K, Tucsnak M. Stabilization of second order evolution equations by a class of unbounded feedbacks[J]. ESAIM Control Optim Calc Var, 2001, 6: 361—386.

[3] Chen G, Coleman M, West H H. Pointwise stabilization in the middle of the span for second order systems, nonuniform and uniform exponential decay of solutions[J]. SIAM J Appl Math, 1987, 47: 751—780.

[4] Curtain R F, Zwart H. An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory[M]. Texts in Applied

Mathematics 21, Springer-Verlag, New York, 1995.
[5] Curtain R F. The Salamon-Weiss class of well-posed infinite dimensional linear systems: a survey[J]. IMA J of Math Control and Inform, 1997, 14: 207—223.
[6] Guo B Z, Luo Y H. Controllability and stability of a second order hyperbolic system with collocated sensor/actuator[J]. Systems & Control Letters, 2002, 46(1): 45—65.
[7] Guo B Z. Rugularity of the transfer function of a wave equation in a disk with Dirichlet boundary control and collocated observation[J]. manuscript, 2002.
[8] Guo B Z. Riesz basis approach to the stabilization of a flexible beam with a tip mass[J]. SIAM J Control & Optim, 2001, 39: 1736—1747.
[9] Lions J L. Exact controlability, stabilization and perturbations for distributed systems[J]. SIAM Review, 1988, 30: 1—68.
[10] Pritchard A J, Wirth A. Unbounded control and observation systems and their duality[J]. SIAM J Control & Optim, 1978, 16: 535—545.
[11] Staffans O. Passive and Conservative Impedance and Scattering Systems[M]. Part I: continuous time well-posed systems, http://www.abo.fi/~staffans, 2002, to appear in Mathematics of Control, Signals and Systems.
[12] Weiss G. Admissibility of unbounded conyrol operators[J]. SIAM J Control & Optim, 1989, 27: 527—545.
[13] Weiss G, Staffans O, Tucsnak M. Well-posed linear systems—a survey with emphasis on conservative systems [J]. Int J Appl Math Comput Sci, 2001, 11: 7—13.
[14] Morgul O, Rao B P, Conrand F. On the stabilization of a cable with a tip mass[J]. IEEE Trans Automatic Control, 1994, 39: 2140—2145.
[15] 于景元, 郭宝珠, 朱广田. 人口分布参数控制理论[M]. 华中理工大学出版社, 1999.

Dirichlet Boundary Stabilization and Riesz Basis Property of One-Dimensional String Equation

XIE Yu, GUO Bao-zhu

(Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and System Sciences, Academia Sinica, Beijing 100080, China)

Abstract: This paper studies a one-dimensional wave equation with one end fixed and Dirichlet boundary feedback control at another. The system is shown to be well-posed and regular in the class of Salamon-Weiss system theory. This explains rigorously that the Hilbert-Uniqueness-Method introduced by J. L. lions in studying the exact controllability of hyperbolic systems is the well-known Duality-Principle in control theory. The Riesz basis property, spectrum-determined growth condition and exponential stability for the closed-loop system are concluded. Through this example, one can catch a glimpse of a new trend appeared very recently in Partial Differential Equation control theory.

Keywords: distributed system; riesz basis; stability; regular; well-posed; spectrum-determined growth condition