基于半张量理论的电力系统稳定域边界逼近
(一)理论基础

马 进[1], 程代展[2], 梅生伟[3], 卢 强[3]
(1. 华北电力大学电力系统保护与动态安全监控教育部重点实验室, 北京市 102206)
(2. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京市 100080; 3. 清华大学电机系, 北京市 100084)

摘要: 电力系统稳定域边界的逼近一直是应用能量函数方法分析电力系统暂态稳定的难点。基于半张量理论,文中给出了逼近电力系统稳定域边界的矩阵方程。通过矩阵运算,可以获得电力系统稳定域边界的高阶逼近表达式。所提出的算法没有对系统进行任何形式的非线性变换,不需要求解系统所有的特征根与特征向量,也无需进行时域积分;算法充分保留了系统的非线性结构,形式简洁。由于该算法完全基于矩阵运算,因此非常适于计算机实现。

关键词: 半张量理论; 稳定域边界; 流形逼近
中图分类号: TM712

0 引言

电力系统暂态稳定是电力系统安全运行的首要前提。判断电力系统暂态稳定的方法主要有逐步积分法与直接法。由于直接法能够快速判定系统的稳定性,使在线应用成为可能,因而它一直是学术研究的热点。直接法主要包括能量函数方法与扩展等面积准则(EEAC)法[1,2]。EEAC 法以系统动态等值为 2 机系统后的不稳定平衡点作为稳定域的边界,从而将等面积准则推广到了多机系统。能量函数方法对稳定域边界的逼近一直是一个难点,迄今并未很好解决,制约了能量函数方法的应用。最初的能量函数方法将离稳定平衡点最近的不稳定平衡点的能量作为稳定域的边界[3~5],这种近似带来很大的分析误差。为了减小能量函数方法的保守性,提出了各种各样的近似稳定域边界的方法,其中最具代表性的是势能界面法[6,7],该方法以故障后从系统稳定平衡点出发的射线方向上势能的最大值作为稳定域的边界。文献[8,9]指出在一定的条件下,稳定域边界是由不稳定平衡点的稳定流形组成的,从而从非线性几何动力学的角度描述了电力系统稳定域边界的拓扑特性。

虽然稳定域边界的拓扑特性已经得到了刻画,然而,如何在能量函数分析方法中运用稳定域的边界仍然是一个未解决的难题。困难在于稳定域的边界是一高维不变流形,它是由状态轨线组成的[9],因此求取稳定域的边界是依靠逐步积分来实现的[9,10],而这显然失去了能量函数方法的优点。为了克服这个困难,文献[11,12]提出了利用正规形近似稳定域边界,但是正规形的方法需要计算所有的特征根,计算量很大。为减小计算量,文献[13]改进了正规形的算法,提出了一种计算稳定域边界二阶逼近的算法,通过矩阵变换,避免了计算所有的特征根。较前一种算法而言,这种改进的算法虽然不需要计算所有特征根,但仍然需要对系统进行非线性变换,不但仍需较大的计算量,而且这种非线性变换不可避免地会引起系统的结构变形;另一方面,由于这种算法的实现需要进行非线性变换,因此它不适于计算机实现,特别是对于更高阶的逼近,寻找非线性变换变得非常困难。因此,在实际应用能量函数方法分析电力系统稳定性时,仍然沿用了等能量面近似稳定域边界的方法。由于能量函数的形式是一个多变量复杂非线性函数,因此描述等能量面是非常困难的,在实际应用时,往往以某一点的能量作为稳定域的边界,这样可能引入较大的分析误差。

应用半张量系统理论,本文给出了对稳定域边界进行任意阶逼近的矩阵方程,并基于此提出了逼近电力系统稳定域边界的数值方法。所提出的算法能够按照系统的精度要求对稳定域的边界进行高阶逼近;算法的实现不需要进行任何形式的坐标变换,不但保留了非线性系统固有的结构,而且算法形式非常简洁。由于该方法是基于矩阵运算的数值方法,因此适于计算机实现。

收稿日期: 2005-10-20; 修回日期: 2005-12-11。
国家重点基础研究发展计划(973 计划)资助项目(2004CB217901); 国家自然科学基金重大项目(50595410); 华北电力大学博士学位教师科研基金资助项目(Dr2004-11)。

1 半张量理论概述

半张量运算是针对非线性系统代数化几何方法所提出的一种新的矩阵运算[14]，其理论基础是矩阵的半张量乘法，数值基础是矩阵在数字计算机中的存储结构即数组。矩阵的半张量乘法是矩阵常规乘法的推广，它与矩阵的张量乘法有着紧密的联系。首先定义向量的半张量乘法如下：

定义1 设 $\boldsymbol{Y}$ 为 p 维列向量，$\boldsymbol{X}$ 为 np 维行向量，则 $\boldsymbol{X}$ 可以分为 p 个 n 维子向量 $\boldsymbol{X}^1,\boldsymbol{X}^2,\cdots,\boldsymbol{X}^p$，定义向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的左半张量积为：

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}\ltimes\boldsymbol{Y}=\sum\limits_{i=1}^{p}\boldsymbol{X}^i y_i\in\mathbf{R}^n\\ \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\ltimes\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\sum\limits_{i=1}^{p}y_i(\boldsymbol{X}^i)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n\end{cases}\tag{1}$$

矩阵的左半张量积可以定义如下：

定义2 如果矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_{m\times n}$，矩阵 $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_{p\times q}$，若 n 是 p 的一个因子，即 $nt=p$，记为 $\boldsymbol{A}\prec_t\boldsymbol{B}$；若 p 是 n 的一个因子，即 $n=pt$，记为 $\boldsymbol{A}\succ_t\boldsymbol{B}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的左半张量积 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\ltimes\boldsymbol{B}$ 由 $m\times q$ 的分块矩阵构成，$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}^{ij})$，其中每一块为：

$$\boldsymbol{C}^{ij}=\boldsymbol{A}^i\ltimes\boldsymbol{B}_j\quad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,q$$

$\boldsymbol{A}^i$ 与 $\boldsymbol{B}_j$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列。

从定义2可以看出，当 $n=p$ 时，矩阵的左半张量积就变成了矩阵的常规积，所以矩阵的常规乘法可以看做是矩阵半张量积的特例。为简明起见，在下文中不引起混淆的地方将省略矩阵的左半张量积符号 $\ltimes$。限于篇幅，下面仅给出本文将用到的矩阵半张量乘积的几个基本性质，更多性质可参阅文献[14]。

性质1 定义2中所定义的矩阵半张量乘积满足：

1)分配律：

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\ltimes(\alpha\boldsymbol{B}+\beta\boldsymbol{C})=\alpha\boldsymbol{A}\ltimes\boldsymbol{B}+\beta\boldsymbol{A}\ltimes\boldsymbol{C}\\(\alpha\boldsymbol{B}+\beta\boldsymbol{C})\ltimes\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{B}\ltimes\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{C}\ltimes\boldsymbol{A}\end{cases}\tag{2}$$

式中：α,β 为常数；$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别为符合定义2半张量乘积的矩阵。

2)结合律：

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\ltimes(\boldsymbol{B}\ltimes\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\ltimes\boldsymbol{B})\ltimes\boldsymbol{C}\\(\boldsymbol{B}\ltimes\boldsymbol{C})\ltimes\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\ltimes(\boldsymbol{C}\ltimes\boldsymbol{A})\end{cases}\tag{3}$$

性质2 设矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_{m\times n}$，如果 $\boldsymbol{Z}\in\mathbf{R}^t$ 为一列向量，则

$$\boldsymbol{Z}\ltimes\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{I}_t\otimes\boldsymbol{A})\ltimes\boldsymbol{Z}\tag{4}$$

$\boldsymbol{I}_t$ 是维数为 t 的单位矩阵，性质2建立了矩阵半张量乘积与矩阵常规张量积之间的关系。

在半张量运算中，另一个重要的概念是交换矩阵。交换矩阵 $\boldsymbol{W}_{[m,n]}$ 是一个 $mn\times mn$ 维矩阵，如果对其列向量按照$((1,1),(1,2),\cdots,(1,n),\cdots,(m,1),(m,2),\cdots,(m,n))$的顺序编号，而对其行向量按照$((1,1),(2,1),\cdots,(m,1),\cdots,(1,n),(2,n),\cdots,(m,n))$的顺序编号，则矩阵 $\boldsymbol{W}_{[m,n]}$ 的编号为$((I,J),(i,j))$的元素值为：

$$w_{(I,J),(i,j)}=\delta_{i,j}^{I,J}=\begin{cases}1 & I=i\text{ 且 }J=j\\0 & \text{其他}\end{cases}\tag{5}$$

在上述概念的基础上，定义半张量的多项式运算及微分运算。

定义3 设 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，则

$$\boldsymbol{x}^k=\underbrace{\boldsymbol{x}\ltimes\boldsymbol{x}\ltimes\cdots\ltimes\boldsymbol{x}}_{k}\text{ 与 }\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}^k=\boldsymbol{F}\ltimes\boldsymbol{x}^k$$

分别为半张量乘法意义下向量 $\boldsymbol{x}$ 的 k 次幂与向量 $\boldsymbol{x}$ 的 k 次齐次多项式，其中系数向量 $\boldsymbol{F}$ 是一个 $1\times n^k$ 维的行向量。

为了研究向量 $\boldsymbol{x}$ 的 k 次齐次多项式的微分，首先定义半张量理论下函数矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的微分如下：

定义4 设矩阵 $\boldsymbol{H}=(h_{ij}(\boldsymbol{x}))$ 为 $p\times q$ 维矩阵，其每一项 $h_{ij}(\boldsymbol{x})$ 都是定义于 $\mathbf{R}^n$ 的光滑函数，则矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的微分 $\mathrm{D}\boldsymbol{H}$ 定义为一个 $p\times nq$ 维的矩阵，它是把原矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的每一项 h_{ij} 用其微分 $\mathrm{d}h_{ij}=\left[\dfrac{\partial h_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_1},\dfrac{\partial h_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_2},\cdots,\dfrac{\partial h_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right]$代替。

因此 $\boldsymbol{x}^k$ 有如下微分性质：

性质3

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{x}^{k+1})=\boldsymbol{\Phi}_k\ltimes\boldsymbol{x}^k\tag{6}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_k$ 是一个 $n^{k+1}\times n^{k+1}$ 维矩阵，定义为：

$$\boldsymbol{\Phi}_k=\sum_{s=0}^{k}\boldsymbol{I}_{n^s}\otimes\boldsymbol{W}_{[n^{k-s},n]}\tag{7}$$

$\boldsymbol{I}_{n^s}$ 是阶数为 n^s 的单位矩阵。

根据式(5)与式(7)，显然有：

$$\boldsymbol{I}_{n^0}=1,\boldsymbol{\Phi}_0=\boldsymbol{I}_n$$

从式(7)可以看出，半张量微分运算式(6)中的系数矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_k$ 可以表示成单位矩阵与交换矩阵张量积的和。根据半张量运算的微分性质，有如下定理：

定理1 设 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$为从 $\mathbf{R}^m$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的解析映射，则 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$的泰勒展开式可以表示为：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\mathrm{D}^k\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0))\ltimes(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^k\tag{8}$$

2 电力系统稳定域边界的逼近

2.1 电力系统稳定域边界的拓扑特性

直接法研究的电力系统的动态模型可表示为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\tag{9}$$

式中：$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 为状态变量。

不失一般性，设主导不稳定平衡点 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{u}}$ 已移至坐标原点。其稳定流形与不稳定流形分别如式(10)、式(11)所示：

$$M^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{u}}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{x}_{\mathrm{u}}\} \tag{10}$$

$$M^{\mathrm{u}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{u}}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \lim_{t\to-\infty} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{x}_{\mathrm{u}}\} \tag{11}$$

式中：$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},t)$表示以 $\boldsymbol{x}$ 为初值的解轨迹。

设式(9)的稳定平衡点为 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{s}}$，则其稳定域可定义为：

$$A(\boldsymbol{x}_{\mathrm{s}}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{x}_{\mathrm{s}}\} \tag{12}$$

记稳定域边界为$\partial A(\boldsymbol{x}_{\mathrm{s}})$，则关于稳定域边界有如下定理[9]：

定理 2　对于一般的非线性系统(9)，如果其满足以下 3 个假设条件，则其渐近稳定平衡点 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{s}}$ 的稳定域边界$\partial A(\boldsymbol{x}_{\mathrm{s}})$是由位于边界上的不稳定平衡点的稳定流形组成的：①边界上的平衡点是双曲平衡点；②边界上平衡点的稳定流形与不稳定流形满足横截条件；③边界上的所有轨线在 $t\to\infty$时，都趋向平衡点。

由于 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{u}}$ 是 type-1 型的不稳定平衡点，记其稳定流形为 $h(\boldsymbol{x})$。$h(\boldsymbol{x})$满足如下定理[15]：

定理 3　设 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{u}}=\boldsymbol{0}$ 是 n 维向量场 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的 1 型平衡点，则

$$M^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{u}}) = \{\boldsymbol{x} \mid h(\boldsymbol{x}) = 0\} \tag{13}$$

设 n 维向量场 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{u}}$ 处的 Jacobian 矩阵为 $\boldsymbol{J}$，则 $h(\boldsymbol{x})$由以下条件式(14)～式(17)惟一决定。

$$h(\boldsymbol{0}) = 0 \tag{14}$$

$$h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + O(\|\boldsymbol{x}\|^2) \tag{15}$$

$$L_f h(\boldsymbol{x}) = uh(\boldsymbol{x}) \tag{16}$$

$$u\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta} \tag{17}$$

式中：u 是惟一的不稳定特征根；$\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}$ 对应于特征根 u 的右特征向量；$L_f h(\boldsymbol{x})$是 $h(\boldsymbol{x})$相对于向量场 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的李导数。

2.2　电力系统稳定域边界逼近的矩阵方程

根据定理 3，半张量运算下，稳定域边界 $h(\boldsymbol{x})$的泰勒展开式可以表示为：

$$h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{x}^2 + \cdots + \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x}^k + \cdots \tag{18}$$

由定义 4 及性质 3 可得其微分形式为：

$$\mathrm{D}h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{H}_3\boldsymbol{\Phi}_2\boldsymbol{x}^2 + \cdots + \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{\Phi}_{k-1}\boldsymbol{x}^{k-1} + \cdots \tag{19}$$

同理，向量场 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$半张量运算下的泰勒展开式可以表示为：

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{x}^i = \boldsymbol{J}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}_2\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{F}_3\boldsymbol{x}^3 + \cdots \tag{20}$$

由式(19)与式(20)，并应用性质 2，经过计算整理可得稳定域边界 $h(\boldsymbol{x})$相对于向量场 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的李导数为：

$$L_f h(\boldsymbol{x}) = u\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + [\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{F}_1) + \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{F}_2]\boldsymbol{x}^2 + \cdots + \Big[\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{\Phi}_{i-1}(\boldsymbol{I}_{n^{i-1}} \otimes \boldsymbol{F}_{k+1-i})\Big]\boldsymbol{x}^k + \cdots \tag{21}$$

按定理 3，稳定域边界满足：

$$\begin{cases} h(\boldsymbol{x}) = 0 \\ L_f h(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases} \tag{22}$$

将式(22)的第 1 式乘以$-u$ 并与式(22)的第 2 式相加，按 k 归纳，有

$$\Big[\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{\Phi}_{i-1}(\boldsymbol{I}_{n^{i-1}} \otimes \boldsymbol{F}_{k+1-i}) - u\boldsymbol{H}_k\Big]\boldsymbol{x}^k + O(\|\boldsymbol{x}\|^{k+1}) = 0 \qquad k \geqslant 2 \tag{23}$$

则有如下引理：

引理 1　稳定域边界 $h(\boldsymbol{x})$逼近矩阵多项式的系数矩阵 $\boldsymbol{H}_k(k\geqslant 2)$满足如下等式：

$$\Big[\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{\Phi}_{i-1}(\boldsymbol{I}_{n^{i-1}} \otimes \boldsymbol{F}_{k+1-i}) - u\boldsymbol{H}_k\Big]\boldsymbol{x}^k = 0 \tag{24}$$

引理 1 给出了系数矩阵 $\boldsymbol{H}_k$ 所满足的矩阵表达式，但是引理 1 并不能直接用于计算系数矩阵 $\boldsymbol{H}_k$，这是因为在半张量运算中，泰勒展开式(18)与式(20)不是惟一的。造成泰勒展开式不惟一的原因是：由定义 3，$\boldsymbol{x}^k$ 不是k 次齐次多项式的一个最小的基。为此，引入 k 次齐次多项式的自然基。设 $\boldsymbol{S}\in\mathbf{Z}_n^{+}$，$k$ 次齐次多项式的自然基定义为：

$$\boldsymbol{B}_n^k = \{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{S}} \mid \boldsymbol{S} \in \mathbf{Z}_n^{+}, \mid \boldsymbol{S} \mid = k\}$$

其中 $\mid \boldsymbol{S} \mid = \sum_{i=1}^{k} S_i$。设 $\boldsymbol{S}^1=(s_1^1,s_2^1,\cdots,s_n^1)$，$\boldsymbol{S}^2=(s_1^2,s_2^2\cdots,s_n^2)$，如果存在 $0\leqslant t\leqslant n-1$，使得：

$$s_1^1 = s_1^2, s_2^1 = s_2^2, \cdots, s_t^1 = s_t^2, s_{t+1}^1 > s_{t+1}^2$$

就定义 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{S}^1} \prec \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{S}^2}$。将 $\boldsymbol{B}_n^k$ 内的元素按字母顺序排列，所得到的列向量记为 $\boldsymbol{x}_{(k)}$。可以证明[14]自然基 $\boldsymbol{B}_n^k$ 内元素的个数是：

$$\mid \boldsymbol{B}_n^k \mid \equiv d = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \quad k \geqslant 0, n \geqslant 1$$

任取$(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{ik})\in\boldsymbol{x}^k$，则 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$称为 k 次齐次多项式的一个序索引，进一步将 k 次齐次多项式所有的序索引记为：

$$I_{\mathrm{p}}(I;n^k) \equiv I_{\mathrm{p}}(i_1,i_2,\cdots,i_k;n,n,\cdots,n) \tag{25}$$

式(25)表示序索引的每一项 $i_j(1\leqslant j\leqslant k)$在自然数集合$[1,n]$上取值。对于任一序索引$(i_1,i_2,\cdots,i_k)$，定义 n 维行向量 $\boldsymbol{C}_I$，$\boldsymbol{C}_I$ 的每一个元素 $\boldsymbol{C}_I(j)\in\mathbf{Z}_{+}^{n}(1\leqslant j\leqslant n)$为序索引$(i_1,i_2,\cdots,i_k)$中 j 出现的次数。由自然基的定义可知，所有自然基的序索引构成了 $I_{\mathrm{p}}(I;n^k)$的一个子集，可记为：

$$I_{\mathrm{s}}(I;n^k) \equiv \{(i_1,i_2,\cdots,i_k) \in I_{\mathrm{p}}(I;n^k) \mid i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_k\} \tag{26}$$

显然，$I_{\mathrm{s}}(I;n^k)$的每一个序索引就对应于集合 $\boldsymbol{B}_n^k$ 内的一个自然基。对于 $I_{\mathrm{s}}(I;n^k)$内的任一序索引 $I=$

$(i_1, i_2, \cdots, i_k)$,定义集合 P_I,

$$P_I = \{(i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \cdots, i_{\sigma(k)}) \mid (x_{i_{\sigma(1)}}, x_{i_{\sigma(2)}}, \cdots, x_{i_{\sigma(k)}}) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k})\} \tag{27}$$

显然,集合 P_I 包含了序索引 I 中所有的可能排列组合。

自然基 $\boldsymbol{x}_{(k)}$ 与 k 次齐次多项式 $\boldsymbol{x}^k$ 之间存在线性变换矩阵 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}(n,k) \in \boldsymbol{M}_{n^k \times d}$ 与 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}(n,k) \in \boldsymbol{M}_{d \times n^k}$[14],使得:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}(n,k)\boldsymbol{x}_{(k)} \\ \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}(n,k)\boldsymbol{x}^k \end{cases} \tag{28}$$

式中:$\boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}(n,k)\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}(n,k) = I_d$。

$d \times n^k$ 维的矩阵 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}(n,k)$ 可由下述算法形成:

步骤1:对 $d \times n^k$ 维 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}(n,k)$ 矩阵的行列分别编号,行按照 $I_{\mathrm{s}}(I; n^k)$ 的序索引编号,列按照 $I_{\mathrm{p}}(J; n^k)$ 的序索引编号,其中 $J = (i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \cdots, i_{\sigma(k)})$ 表示一个列序索引;

步骤2:对于矩阵 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}(n,k)$ 任一行,不失一般性,设其编号为 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$,则该行元素 $\beta_{I,J}$ 取值为:

$$\beta_{I,J} = \begin{cases} \dfrac{\prod\limits_{j=1}^{n} C_I(j)!}{k!} & J \in P_I \\ 0 & J \notin P_I \end{cases} \tag{29}$$

$n^k \times d$ 维矩阵 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}(n,k)$ 可按如下步骤形成:

步骤1:对 $n^k \times d$ 维 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}(n,k)$ 矩阵的行列分别编号,行按照 $I_{\mathrm{p}}(J; n^k)$ 的序索引编号,列按照 $I_{\mathrm{s}}(I; H^k)$ 的序索引编号;

步骤2:对于矩阵 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}(n,k)$ 任一列,不失一般性,设其编号为 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$,则该列元素 $\alpha_{J,I}$ 取值为:

$$\alpha_{J,I} = \begin{cases} 1 & J \in P_I \\ 0 & J \notin P_I \end{cases} \tag{30}$$

稳定域边界式(18)在自然基下可以重新写为:

$$h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{x}_{(2)} + \boldsymbol{G}_3\boldsymbol{x}_{(3)} + \cdots \tag{31}$$

在式(18)中,如果向量 $\boldsymbol{x}^k$ 的任2个相等分量在矩阵 $\boldsymbol{H}_k$ 中所对应的系数是相等的,则称矩阵 $\boldsymbol{H}_k$ 是对称的。根据自然基的定义,易知稳定域边界式(18)中,对称矩阵 $\boldsymbol{H}_k$ 是惟一的,并且,

$$\begin{cases} \boldsymbol{H}_k = \boldsymbol{G}_k\boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}(n,k) \\ \boldsymbol{G}_k = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}(n,k) \end{cases} \tag{32}$$

将式(28)与式(32)代入式(24),得

$$\boldsymbol{G}_k[u\boldsymbol{I}_d - \boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}(n,k)\boldsymbol{\Phi}_{k-1}(\boldsymbol{I}_{n^{k-1}} \otimes \boldsymbol{F}_1)\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}(n,k)] \cdot \boldsymbol{x}_{(k)} = \Big[\sum_{i=1}^{k-1}\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}(n,i)\boldsymbol{\Phi}_{i-1}(\boldsymbol{I}_{n^{i-1}} \otimes \boldsymbol{F}_{k-i+1})\Big] \cdot \boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}(n,k)\boldsymbol{x}_{(k)} \qquad k \geqslant 2 \tag{33}$$

因为自然基 $\boldsymbol{x}_{(k)}$ 是 k 次齐次多项式的最小基,根据多项式恒等原则,同幂次项的系数应该相等,所以关于稳定域边界式(31)的系数矩阵可通过以下定理计算:

定理4 $k \geqslant 2$ 时,假设矩阵

$$\boldsymbol{C}_k \equiv u\boldsymbol{I}_d - \boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}(n,k)\boldsymbol{\Phi}_{k-1}(\boldsymbol{I}_{n^{k-1}} \otimes \boldsymbol{F}_1)\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}(n,k)$$

非奇异,则系数矩阵 $\boldsymbol{G}_k$ 为:

$$\boldsymbol{G}_k = \Big[\sum_{i=1}^{k-1}\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}(n,i)\boldsymbol{\Phi}_{i-1}(\boldsymbol{I}_{n^{i-1}} \otimes \boldsymbol{F}_{k-i+1})\Big] \cdot \boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}(n,k)\boldsymbol{C}_k^{-1} \tag{34}$$

定理4显示,稳定域边界表达式 $h(\boldsymbol{x})$ 可以用一系列矩阵半张量积的和来近似;而表达式中每一项半张量积的系数矩阵,通过式(34)的矩阵运算就可以得到。由于式(34)仅由矩阵的张量积、半张量积与矩阵求和运算所组成,因此非常容易通过计算机编程实现。

定理4要求矩阵 $\boldsymbol{C}_k = u\boldsymbol{I}_d - \boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}(n,k)\boldsymbol{\Phi}_{k-1}(\boldsymbol{I}_{n^{k-1}} \otimes \boldsymbol{F}_1)\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}(n,k)$ 是非奇异的,这个条件一般都可以满足,如果矩阵 $\boldsymbol{C}_k$ 奇异,则由式(33),应用最小二乘法[16]求解如下矩阵方程($k \geqslant 2$):

$$\boldsymbol{G}_k[u\boldsymbol{I}_d - \boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}(n,k)\boldsymbol{\Phi}_{k-1}(\boldsymbol{I}_{n^{k-1}} \otimes \boldsymbol{F}_1)\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}(n,k)] = \Big[\sum_{i=1}^{k-1}\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{T}_{\mathrm{B}}(n,i)\boldsymbol{\Phi}_{i-1}(\boldsymbol{I}_{n^{i-1}} \otimes \boldsymbol{F}_{k-i+1})\Big]\boldsymbol{T}_{\mathrm{N}}(n,k) \tag{35}$$

其解就是对稳定域边界的第 k 阶逼近。

3 结语

电力系统稳定域边界的数学逼近对于正确应用直接法分析电力系统暂态稳定性具有重要影响;而且基于对稳定域边界的逼近可进一步估计功率空间内电力系统动态安全域的大小[17]。本文基于半张量理论,给出了对稳定域边界进行任意阶逼近的矩阵方程。所提出的矩阵方程能够按照系统的精度要求对稳定域的边界进行高阶逼近;算法的实现不需要进行任何形式的坐标变换,不但保留了非线性系统固有的结构,而且算法形式简洁;由于该方法是基于矩阵运算的数值方法,因此非常适于计算机实现。

参考文献

[1] 余贻鑫,王成山.电力系统稳定性理论与方法.北京:科学出版社,1999.
YU Yi-xin, WANG Cheng-shan. Power System Stability Theory and Methods. Beijing: Science Press, 1999.

[2] 傅书逷,倪以信,薛禹胜.直接法稳定分析.北京:中国电力出版社,1999.
FU Shu-ti, NI Yi-xin, XUE Yu-sheng. Direct Methods on Stability Analysis. Beijing: China Electric Power Press, 1999.

[3] KUNDUR P. Power System Stability and Control. New York

(NY, USA): McGraw-Hill Inc, 1993.

[4] GLESS G E. Direct Method of Lyapunov Applied to Transient Power System Stability. IEEE Trans on Power Apparatus and Systems, 1966, 85(2): 159—168.

[5] EL-ABIAD A, NAGAPPAN H K. Transient Stability Regions of Multimachine Power System. IEEE Trans on Power Apparatus and Systems, 1966, 85(2): 169—178.

[6] KAKIMOTO N, OHSAWA Y, HAYASHI M. Transient Stability Analysis of Multi-machine Power Systems with Field Flux Decay via Lyapunov's Direct Method. IEEE Trans on Power Apparatus and Systems, 1980, 99(5): 1819—1827.

[7] KAKIMOTO N, OHSAWA Y, HAYASHI M. Transient Stability Analysis of Large-scale Power Systems by Lyapunov's Direct Method. IEEE Trans on Power Apparatus and Systems, 1984, 103(1): 160—167.

[8] ZABORSZKY J, HUANG G, ZHENG B et al. On the Phase Portraits of a Class of Large Nonlinear Dynamic Systems Such as the Power System. IEEE Trans on Automatic Control, 1988, 33(1): 4—15.

[9] CHIANG H D, HIRSCH M, WU F. Stability Regions of Nonlinear Autonomous Dynamical Systems. IEEE Trans on Automatic Control, 1988, 33(1): 16—27.

[10] 侯凯元,闵勇,陈磊.基于逆轨迹方法的简单电力系统稳定域的可视化.电力系统自动化,2004,28(11):22—27.
HOU Kai-yuan, MIN Yong, CHEN Lei. The Visualization of Stability Regions for Simple Power Systems Based on Trajectory Reversing Method. Automation of Electric Power Systems, 2004, 28(11): 22—27.

[11] ABDEL SALAM F M, ARAPOSTATHIS A, VARAIYA P P. Analytic Expressions for the Unstable Manifold at Equilibrium Points in Dynamical Systems of Differential Equations. In: Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control, Vol 3. San Antonio (TX, USA): 1983. 1389—1392.

[12] SAHA S, VITTAL V, KLIEMANN W et al. Local Approximation of Stability Boundary of a Power System Using the Real Normal Form of Vector Fields. In: Proceedings of IEEE International Symposium on Circuit and Systems, Vol 3. Seattle (WA, USA): 1995. 2330—2333.

[13] VENKATASUBRAMANIAN V, JI Wei-jun. Numerical Approximation of $(n-1)$ Dimensional Stable Manifolds in Large Systems Such as the Power System. Automatica, 1997, 38(10): 1877—1883.

[14] CHENG Dai-zhan. Matrix and Polynomial Approach to Dynamic Control Systems. Beijing: Science Press, 2002.

[15] CHENG Dai-zhan, MA Jin, LU Qiang et al. Quadratic Form of Stable Sub-manifold for Power Systems. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2004, 14(9/10): 773—788.

[16] NELLES O. Nonlinear System Identification. Berlin (Germany): Springer, 2001.

[17] 薛安成,梅生伟,卢强,等.基于网络约化模型的电力系统动态安全域近似.电力系统自动化,2005,29(13):18—23.
XUE An-cheng, MEI Sheng-wei, LU Qiang et al. Approximations for the Dynamic Security Region of Network-reduction Power System. Automation of Electric Power Systems, 2005, 29(13): 18—23.

马 进(1975—),男,博士,讲师,研究方向为电力系统非线性分析与控制、电力系统动态仿真。E-mail: majin@tsinghua.org.cn

程代展(1946—),男,博士,教授,研究方向为非线性控制与哈密顿系统。

梅生伟(1964—),男,博士,教授,研究方向为电力系统非线性控制。

Approximation of the Boundary of Power System Stability Region Based on Semi-tensor Theory Part One Theoretical Basis

MA Jin[1], *CHENG Dai-zhan*[2], *MEI Sheng-wei*[3], *LU Qiang*[3]

(1. Key Laboratory of Power System Protection and Dynamic Security Monitoring and Control Under Ministry of Education, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

(2. Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

(3. Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Energy function method can provide fast evaluation on system stability after the transients. The boundary of attraction region is very important for application of the energy function method. However, how to approximate the boundary of attraction region remains unsolved. Based on the semi-tensor theory, a novel boundary approximation algorithm is presented, which is derived from the topological characteristics of the stability boundary. In the proposed algorithm, through matrix operations, the high rank approximation expression is obtained. It does not make any nonlinear transformation of the dynamic system, does not require calculating all the eigenvalues and eigenvectors of the dynamic system and also need not time domain integral. Thus, the nonlinear nature of the power system is fully preserved. Another advantage of the proposed algorithm is its easy implementation by the digital computer, since only the matrix calculation is involved in the algorithm.

This work is supported by Special Fund of the National Basic Research Program of China (No. 2004CB217901), the Grand Project of National Natural Science Foundation of China (No. 50595410), and North China Electric Power University Fund for Faculty with Doctor Degree (No. Dr 2004-11).

Key words: semi-tensor theory; boundary of attraction region; manifold approximation